

Université Internationale de Casablanca

Ecole d'Ingénierie

***COURS ET TRAVAUX DIRIGES
D'ELECTROTECHNIQUE***

2^{ème} année CPI

Ch III : **Réseau alternatif monophasé**

I- Grandeurs sinusoïdales

1°) Grandeur périodique - Grandeur alternative - Grandeur sinusoïdale

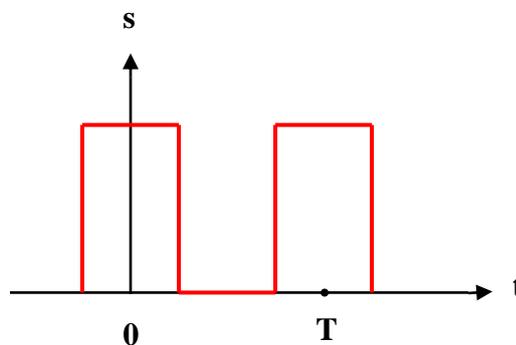
a- Grandeur périodique

Une grandeur s est périodique de période T si sa valeur à l'instant t est telle que $s(t) = s(t+T)$.

T s'exprime en secondes (s).

$f = 1/T$ est la fréquence : c'est le nombre de périodes par seconde. Elle s'exprime en Hertz (Hz).

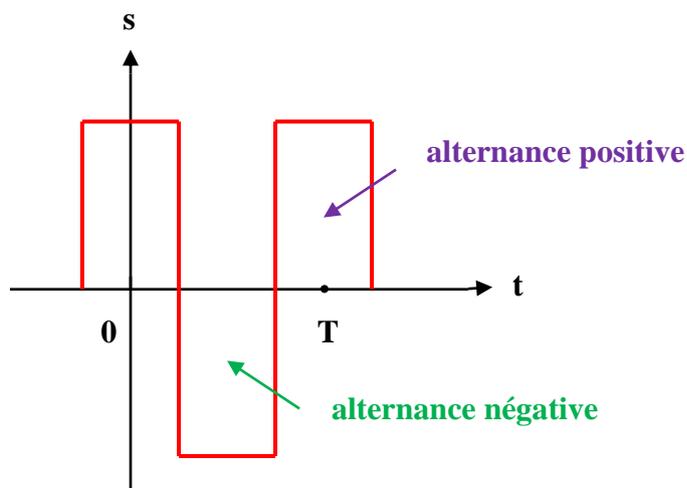
N.B : Une grandeur représente une tension ou un courant.



b- Grandeur alternative

Une grandeur périodique est alternative si sa valeur instantanée est tantôt positive, tantôt négative.

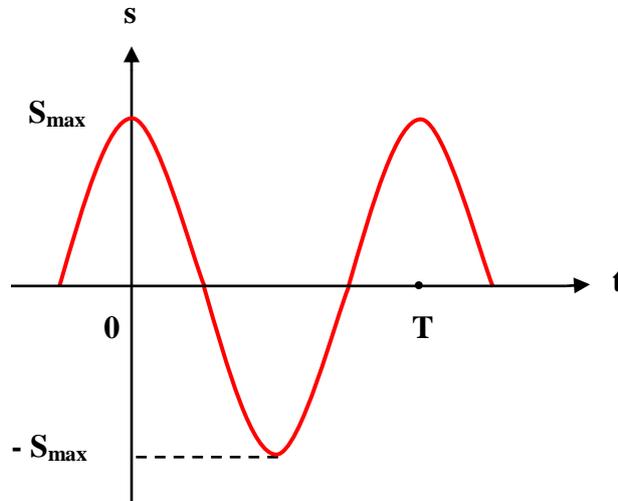
Si par période, elle ne s'annule que deux fois, la partie positive constitue l'alternance positive et la partie négative constitue l'alternance négative.



c- Grandeur sinusoïdale

Une grandeur sinusoïdale s est définie par : $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$

- S_m : valeur max ou amplitude ;
- ω : pulsation ($\omega = 2\pi/T = 2\pi f$ avec T la période et f la fréquence) ;
- $\omega t + \varphi$: phase à l'instant t ou phase instantanée ;
- φ : phase initiale ou phase à l'instant $t = 0$.



N.B : Une grandeur représente une tension ou un courant.

2°) Valeur moyenne et valeur efficace d'une grandeur sinusoïdale

On caractérise une grandeur périodique par :

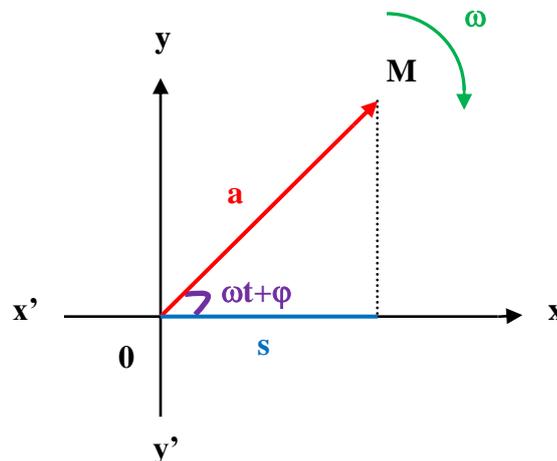
– sa valeur moyenne : $S_{\text{moy}} = \langle s \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt$

– sa valeur efficace : $S_{\text{eff}} = S = \sqrt{\langle s^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt}$

Pour une grandeur sinusoïdale : $S_{\text{moy}} = 0$ et $S_{\text{eff}} = \frac{S_m}{\sqrt{2}}$

3°) Représentation et propriétés des grandeurs sinusoïdales

a- Représentation vectorielle d'une grandeur sinusoïdale



Soit a la norme d'un vecteur \vec{OM} tournant autour de son origine O avec une vitesse angulaire ω .
Soit φ sa position angulaire par rapport à l'axe $x'Ox$ à l'instant $t = 0$. Sa position à l'instant t sera définie par l'angle $\omega t + \varphi$. Sa projection sur l'axe $x'Ox$ définit la grandeur sinusoïdale $s = a \cos(\omega t + \varphi)$.

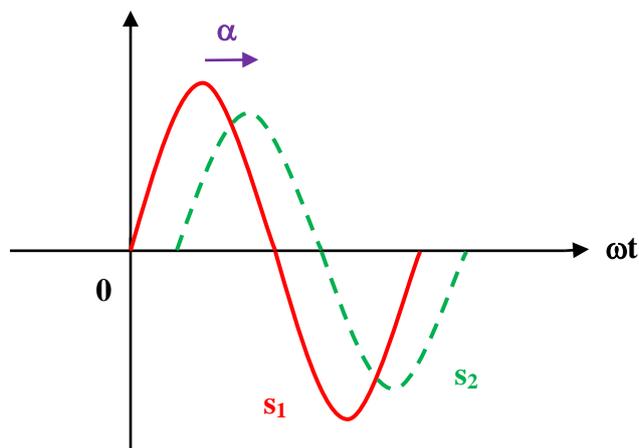
Réciproquement, toute grandeur sinusoïdale peut être représentée par un vecteur tournant \vec{OM} dont la norme est égale à l'élongation maximale et dont la position angulaire à l'instant t est $(\vec{Ox}, \vec{OM}) = \omega t + \varphi$ si φ est la phase à l'instant $t = 0$.

b- Notion de déphasage

Soient 2 grandeurs sinusoïdales de même pulsation $s_1 = S_{1m} \cos(\omega t + \varphi_1)$ et $s_2 = S_{2m} \cos(\omega t + \varphi_2)$.

L'angle $\alpha = \varphi_2 - \varphi_1$ représente le déphasage de s_2 par rapport à s_1 .

- Si $\alpha = 0$, s_1 et s_2 sont en phase.
- Si $\alpha > 0$, s_2 est en avance / à s_1 ($\alpha = \pi/2$: s_2 est en quadrature avance par rapport à s_1).
- Si $\alpha < 0$, s_2 est en retard / à s_1 ($\alpha = -\pi/2$: s_2 est en quadrature retard par rapport à s_1).



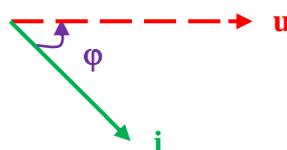
Remarque : Dans le cas d'un récepteur alimenté sous une tension u et traversé par un courant i , on adoptera la convention suivante pour les expressions instantanées :

- $u = U\sqrt{2} \cos \omega t$ (origine des phases)
- $i = I\sqrt{2} \cos(\omega t - \varphi)$ (φ est compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$)

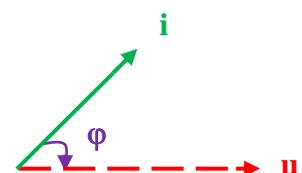
- $\varphi = 0$ dans le cas d'un récepteur résistif
- $\varphi > 0$ dans le cas d'un récepteur inductif
- $\varphi < 0$ dans le cas d'un récepteur capacitif



récepteur résistif



récepteur inductif



récepteur capacitif

N.B : les angles sont comptés positivement dans le sens trigonométrique.

c- Grandeur complexe associée à une grandeur sinusoïdale

A la grandeur sinusoïdale $s = S\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$ on fait correspondre la grandeur complexe associée $\bar{S} = S e^{j\varphi}$.

$$\begin{cases} S = S_{\text{eff}} = |\bar{S}| \\ \varphi = \arg \bar{S} \end{cases}$$

II- Puissances

1°) Puissance instantanée

La puissance instantanée d'un récepteur alimenté sous une tension u et traversé par un courant i est définie par : $p = ui$

2°) Puissance moyenne ou puissance active

$$P = \langle p \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T ui \, dt \quad (\text{unité : W, KW, MW, GW})$$

W : Watt

En régime sinusoïdal : $P = UI \cos \varphi$

La puissance active correspond à la puissance électrique transportée entre les générateurs et les récepteurs. Physiquement, elle est liée à une transformation d'énergie :

- . **mécanique** → **électrique** dans les générateurs (dynamos, alternateurs, génératrices asynchrones) ;
- . **électrique** → **mécanique** dans les moteurs ;
- . **électrique** → **calorifique** dans les récepteurs destinés à l'éclairage ou au chauffage ;
- . **chimique** → **électrique** dans les batteries accumulateurs ;
- . **rayonnement** → **électrique** dans les panneaux solaires.

3°) Puissance apparente

Elle est définie par : $S = UI$ (unité : VA, KVA, MVA, ...)

VA : Volt Ampère

On l'appelle aussi puissance de dimensionnement. Elle sert à déterminer la section des conducteurs d'une ligne électrique ainsi que celle des enroulements d'un transformateur ou d'un alternateur.

4°) Facteur de puissance

En régime sinusoïdal, il est défini par : $f_p = \frac{P}{S} = \frac{UI \cos \varphi}{UI} = \cos \varphi$

Pour fournir une puissance P à une installation sous une tension U donnée, on a intérêt à limiter les pertes par effet Joule dans la ligne en diminuant le courant I , donc en augmentant le $\cos \varphi$. En effet, si on considère une installation de facteur de puissance $\cos \varphi$, alimentée sous une tension U donnée par une ligne de résistance R , la puissance consommée par l'installation est $P = UI \cos \varphi$ et celle dissipée dans la ligne est $P_J = RI^2$. Si $\cos \varphi$ augmente pour une même puissance P , I diminue et P_J diminue.

Les fournisseurs d'énergie électrique obligent les consommateurs à avoir des installations dont le facteur de puissance est proche de 1 (supérieur à 0,8), sinon il y'aura pénalité.

Pour améliorer le $\cos \varphi$, il suffit d'installer des condensateurs aux bornes de l'installation.

5°) Puissance réactive

En régime sinusoïdal, elle est définie par : $\boxed{Q = UI \sin \varphi}$ (unité : VAR, KVAR,...)

VAR : Volt Ampère Réactif

- Pour un récepteur résistif : $Q = 0$
- Pour un récepteur inductif : $Q > 0$ (la puissance réactive est **consommée**)
- Pour un récepteur capacitif : $Q < 0$ (la puissance réactive est **fournie**)

6°) Relation entre P, Q et S

$$\text{En régime } \underline{\text{sinusoïdal}} : \left. \begin{array}{l} P = UI \cos \varphi \\ Q = UI \sin \varphi \\ S = UI \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} S = \sqrt{P^2 + Q^2} \\ \text{tg } \varphi = \frac{Q}{P} \end{array} \right.$$

7°) Puissance apparente complexe

On appelle puissance apparente complexe le produit $\bar{S} = \bar{U} \bar{I}^*$ où \bar{I}^* est le conjugué de \bar{I} .

$$\left. \begin{array}{l} \bar{U} = U \\ \bar{I} = I e^{-j\varphi} \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{S} = \bar{U} \bar{I}^* = UI e^{j\varphi} = UI \cos \varphi + j UI \sin \varphi = P + jQ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P = \text{Re}(\bar{S}) \\ Q = \text{Im}(\bar{S}) \end{array} \right.$$

Pour un récepteur d'impédance $\bar{Z} = R + jX$:

$$\bar{S} = \bar{U} \bar{I}^* = \bar{Z} \bar{I} \bar{I}^* = \bar{Z} I^2 = (R + jX) I^2 \Rightarrow P + jQ = RI^2 + jXI^2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P = RI^2 \\ Q = XI^2 \end{array} \right.$$

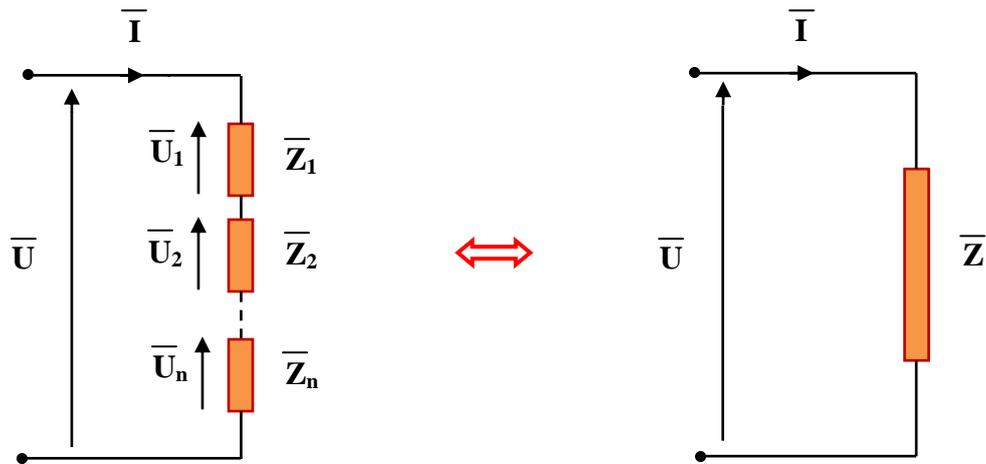
- Dans le cas d'une résistance R : $P = RI^2$ ou $P = \frac{U^2}{R}$ et $Q = 0$

- Dans le cas d'une inductance L : $P = 0$ et $Q = L\omega I^2$ ou $Q = \frac{U^2}{L\omega}$

- Dans le cas d'une capacité C : $P = 0$ et $Q = -\frac{1}{C\omega} I^2$ ou $Q = -C\omega U^2$

III- Association d'impédances - Théorème de Boucherot

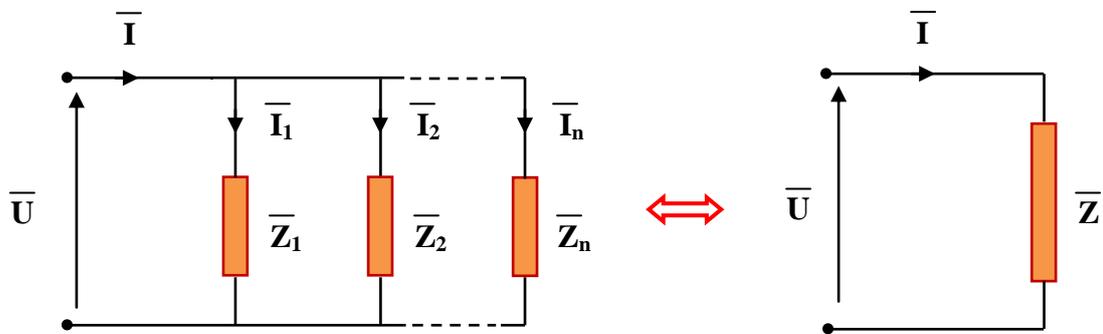
1°) Association série



$$\bar{U} = \bar{U}_1 + \dots + \bar{U}_n \Rightarrow \bar{Z}\bar{I} = \bar{Z}_1\bar{I} + \dots + \bar{Z}_n\bar{I} \Rightarrow \bar{Z} = \sum_i \bar{Z}_i : \text{impédance équivalente.}$$

$$\bar{U}\bar{I}^* = \bar{U}_1\bar{I}^* + \dots + \bar{U}_n\bar{I}^* \Rightarrow \bar{S} = \bar{S}_1 + \dots + \bar{S}_n \Rightarrow P + jQ = P_1 + jQ_1 + \dots + P_n + jQ_n \Rightarrow \begin{cases} P = \sum_i P_i \\ Q = \sum_i Q_i \end{cases}$$

2°) Association parallèle



$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \dots + \bar{I}_n \Rightarrow \bar{U}/\bar{Z} = \bar{U}/\bar{Z}_1 + \dots + \bar{U}/\bar{Z}_n \Rightarrow \frac{1}{\bar{Z}} = \sum_i \frac{1}{\bar{Z}_i} \text{ ou } \bar{Y} = \sum_i \bar{Y}_i : \text{admittance équivalente}$$

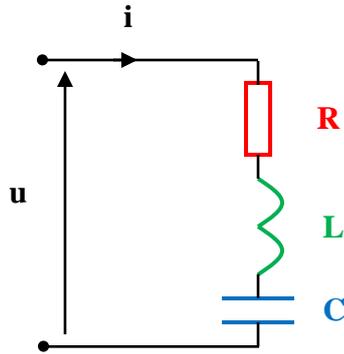
$$\bar{U}\bar{I}^* = \bar{U}\bar{I}_1^* + \dots + \bar{U}\bar{I}_n^* \Rightarrow \bar{S} = \bar{S}_1 + \dots + \bar{S}_n \Rightarrow P + jQ = P_1 + jQ_1 + \dots + P_n + jQ_n \Rightarrow \begin{cases} P = \sum_i P_i \\ Q = \sum_i Q_i \end{cases}$$

3°) Théorème de Boucherot

Quelle que soit l'association des récepteurs, les puissances actives s'ajoutent et les puissances réactives s'ajoutent algébriquement.

IV- Application

Soit un circuit RLC série auquel on applique une tension u sinusoïdale. On suppose que $L\omega > 1/C\omega$.



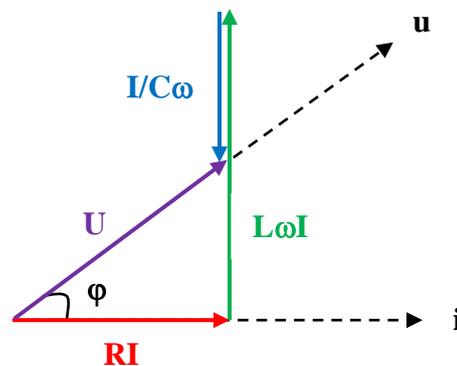
- $u = U\sqrt{2} \cos \omega t$ (origine des phases)
- $i = I\sqrt{2} \cos(\omega t - \varphi)$ $I = ?$ $\varphi = ?$

En régime sinusoïdal, on peut écrire : $\bar{U} = R\bar{I} + jL\omega\bar{I} - \frac{j}{C\omega}\bar{I}$ (1)

On peut utiliser plusieurs méthodes pour déterminer I et φ :

1°) Méthode vectorielle (Représentation de Fresnel)

La relation (1) peut être représentée par le diagramme vectoriel suivant :



$$\begin{cases} U^2 = R^2 I^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2 I^2 & \Rightarrow I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2}} \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{(L\omega - 1/C\omega)I}{RI} & \Rightarrow \varphi = \operatorname{Arctg} \frac{L\omega - 1/C\omega}{R} \end{cases}$$

2°) Méthode des grandeurs complexes associées

En écriture complexe, la relation (1) peut s'écrire $\bar{U} = \bar{Z}\bar{I}$ où $\bar{Z} = R + j(L\omega - 1/C\omega)$ est l'impédance complexe du circuit.

$$\begin{cases} \bar{U} = U \\ \bar{I} = I e^{-j\varphi} \end{cases} \quad \begin{cases} |\bar{U}| = U \\ \arg \bar{U} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} |\bar{I}| = I \\ \arg \bar{I} = -\varphi \end{cases}$$

D'après la loi d'Ohm :

$$\bar{I} = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}} \Rightarrow \begin{cases} I = |\bar{I}| = \frac{|\bar{U}|}{|\bar{Z}|} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2}} \\ -\varphi = \arg \bar{I} = \arg \frac{\bar{U}}{\bar{Z}} = \arg \bar{U} - \arg \bar{Z} = -\arg \bar{Z} = -\text{Arctg} \frac{L\omega - 1/C\omega}{R} \end{cases}$$

3°) Méthode des puissances (Méthode de Boucherot)

$$\begin{cases} P = P_R + P_L + P_C = RI^2 + 0 + 0 = RI^2 \\ Q = Q_R + Q_L + Q_C = 0 + L\omega I^2 - I^2 / C\omega = (L\omega - 1/C\omega) I^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S = \sqrt{P^2 + Q^2} = UI \Rightarrow \sqrt{R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2} I^2 = UI \Rightarrow I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2}} \\ \text{tg} \varphi = \frac{Q}{P} = \frac{(L\omega - 1/C\omega) I^2}{RI^2} \Rightarrow \varphi = \text{Arctg} \frac{L\omega - 1/C\omega}{R} \end{cases}$$

Résumé

Valeur moyenne et valeur efficace d'une grandeur périodique

. Valeur moyenne : $S_{\text{moy}} = \langle s \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt$

. Valeur efficace : $S_{\text{eff}} = S = \sqrt{\langle s^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt}$

En régime sinusoïdal : $S_{\text{moy}} = 0$ et $S_{\text{eff}} = S = \frac{S_m}{\sqrt{2}}$

Expressions instantanées de la tension et du courant

En régime sinusoïdal : $u = U\sqrt{2} \cos \omega t$ et $i = I\sqrt{2} \cos(\omega t - \varphi)$ ($-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$)

- $\varphi = 0$ dans le cas d'un récepteur résistif
- $\varphi > 0$ dans le cas d'un récepteur inductif
- $\varphi < 0$ dans le cas d'un récepteur capacitif

Expressions complexes de la tension et du courant

En régime sinusoïdal : $\bar{U} = U e^{j0} = U$ et $\bar{I} = I e^{-j\varphi}$ avec $\varphi = \arg \bar{Z}$

Puissance active

En régime sinusoïdal : $P = UI \cos \varphi$ (unité : W, KW, MW, GW) (W : Watt)

Puissance réactive

En régime sinusoïdal : $Q = UI \sin \varphi$ (unité : VAR, KVAR, ...) (VAR : Volt Ampère Réactif)

→ Pour un récepteur résistif : $Q = 0$

→ Pour un récepteur inductif : $Q > 0$ (la puissance réactive est **consommée**)

→ Pour un récepteur capacitif : $Q < 0$ (la puissance réactive est **fournie**)

Puissance apparente

En régime sinusoïdal : $S = UI$ (unité : VA, KVA, MVA, ...) (VA : Volt Ampère)

Relation entre P, Q et S

$$\text{En régime sinusoïdal : } \left. \begin{array}{l} P = UI \cos \varphi \\ Q = UI \sin \varphi \\ S = UI \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} S = \sqrt{P^2 + Q^2} \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{Q}{P} \end{array} \right.$$

Autres expressions de P et Q

$$P = RI^2 \text{ ou } \frac{U^2}{R} ; Q = XI^2 \text{ ou } \frac{U^2}{X}$$

– Dans le cas d'une résistance R : $P = RI^2$ ou $\frac{U^2}{R}$; $Q = 0$

– Dans le cas d'une inductance L : $P = 0$; $Q = L\omega I^2$ ou $\frac{U^2}{L\omega}$

– Dans le cas d'une capacité C : $P = 0$; $Q = -\frac{1}{C\omega} I^2$ ou $-C\omega U^2$

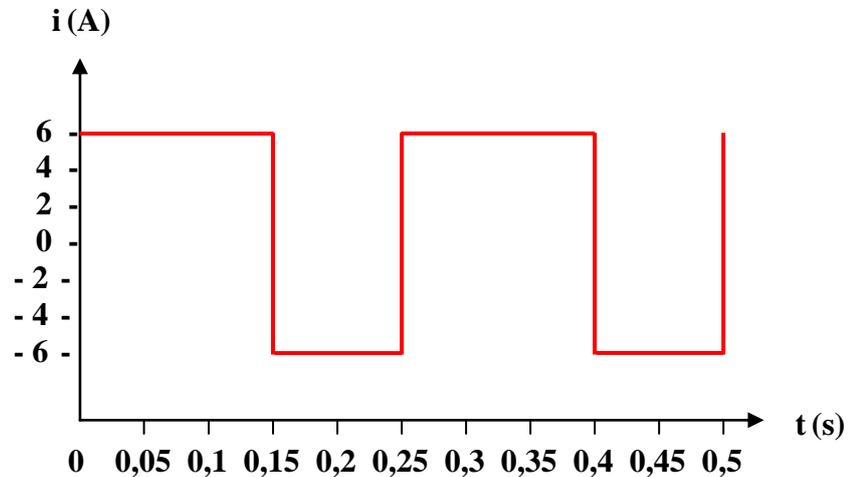
Théorème de Boucherot

Quelle que soit l'association des récepteurs, les puissances actives s'ajoutent et les puissances réactives s'ajoutent algébriquement : $P = \sum_i P_i$ et $Q = \sum_i Q_i$ (somme algébrique)

Exercices d'application

Exercice I

Soit un courant $i(t)$ représenté par le signal suivant :



- 1°) Donner la période T , la fréquence f et la pulsation ω du courant $i(t)$.
- 2°) Définir et calculer sa valeur moyenne I_{moy} .
- 3°) Définir et calculer sa valeur efficace I_{eff} .

Exercice II

1°) Une bobine de résistance $R = 10\Omega$ et d'inductance $L = 0,1H$ est alimentée sous une tension sinusoïdale u de valeur efficace $U = 220V$ et de fréquence $f = 50Hz$.

- a- Donner l'expression de l'impédance complexe \bar{Z} de la bobine. Calculer son module et son argument.
- b- Calculer la valeur efficace I du courant et le déphasage φ du courant sur la tension. En déduire le facteur de puissance $\cos \varphi$ de la bobine.
- c- Calculer de deux façons différentes les puissances active P et réactive Q consommées par la bobine.

2°) On branche en parallèle avec la bobine précédente un condensateur de capacité $C = 80 \mu F$.

- a- En utilisant le théorème de Boucherot calculer les puissances active P' et réactive Q' consommées. Conclure.
- b- Calculer la valeur efficace I' du courant et le déphasage φ' du courant sur la tension. En déduire le nouveau facteur de puissance $\cos \varphi'$. Conclure.
- c- Donner l'expression de l'impédance complexe \bar{Z}' . Calculer son module et son argument. Retrouver les résultats de la question précédente.
- d- Calculer la valeur efficace I_C du courant traversant le condensateur.
- e- Est-ce que $I' = I + I_C$? Conclure.

Exercice III

Une installation monophasée, alimentée par un réseau 220V – 50Hz, comporte :

- un radiateur de puissance $P_1 = 5KW$ et de facteur de puissance $\cos \varphi_1 = 1$;
- un moteur monophasé de puissance utile (mécanique) $P_u = 2KW$, de rendement $\eta = 80\%$ et de facteur de puissance $\cos \varphi_2 = 0,75$;
- un poste de soudure de puissance électrique $P_3 = 4KW$ et de facteur de puissance $\cos \varphi_3 = 0,6$.

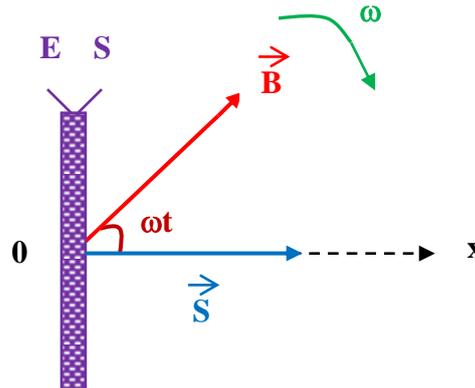
- 1°) Calculer la puissance électrique P_2 absorbée par le moteur.
- 2°) Calculer la puissance active P absorbée lorsque tous les récepteurs fonctionnent.
- 3°) Calculer la puissance réactive Q absorbée lorsque tous les récepteurs fonctionnent.
- 4°) En déduire la valeur efficace I du courant de ligne ainsi que le facteur de puissance $\cos \varphi$ de l'installation.
- 5°) Calculer la capacité C du condensateur à brancher aux bornes de cette installation pour que le facteur de puissance soit $\cos \varphi' = 0,95$.
- 6°) Calculer la valeur efficace I' du nouveau courant de ligne après amélioration du facteur de puissance. Conclure.

Ch IV : **Réseau triphasé équilibré**

I- Principe de production des courants triphasés

1°) Principe de création d'une f.e.m alternative

Considérons une bobine plate de n spires placée dans un champ d'induction magnétique \vec{B} tournant à la vitesse angulaire ω . Ce champ peut être créé par la rotation d'un aimant ou d'un électroaimant.

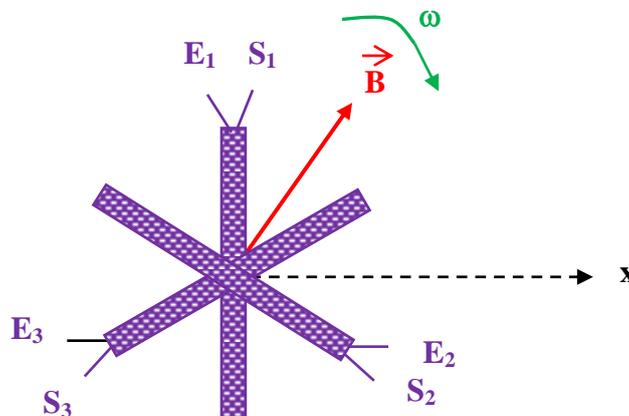


Le flux à travers la surface de la bobine à l'instant t est $\phi = \vec{n} \cdot \vec{B} \cdot \vec{S} = nBS \cos \omega t$. La bobine est traversée par un flux variable. Elle sera donc le siège d'une f.e.m alternative $e = -d\phi/dt = E_m \sin \omega t$ avec $E_m = nBS\omega$. C'est la loi de Lenz - Faraday ou loi de l'induction électromagnétique.

Ce phénomène intervient dans la plus part des dispositifs électriques. En électrotechnique, on peut citer comme application, les générateurs à f.e.m d'induction (alternateurs, dynamos, transformateurs,...).

2°) Principe de création de f.e.m triphasées

Considérons maintenant 3 bobines identiques décalées entre elles de 120° ou $2\pi/3$ dans l'espace et soumises au même champ magnétique tournant.

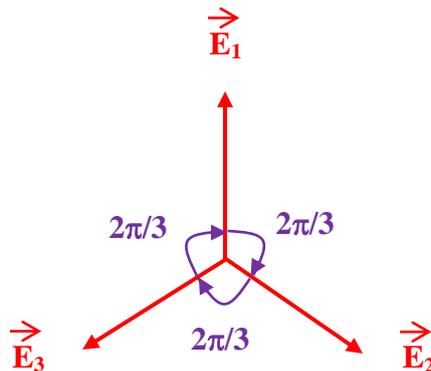


La f.e.m induite dans la bobine 1 est : $e_1 = E_m \sin \omega t$.

Il est clair que la f.e.m induite dans la bobine 2 sera déphasée par rapport à celle induite dans la bobine 1 de 120° ou $2\pi/3$, celle induite dans la bobine 3 de 240° ou $4\pi/3$.

$$\begin{cases} e_1 = E_m \sin \omega t \\ e_2 = E_m \sin(\omega t - 2\pi/3) \\ e_3 = E_m \sin(\omega t - 4\pi/3) = E_m \sin(\omega t + 2\pi/3) \end{cases} \quad E_m = E\sqrt{2}$$

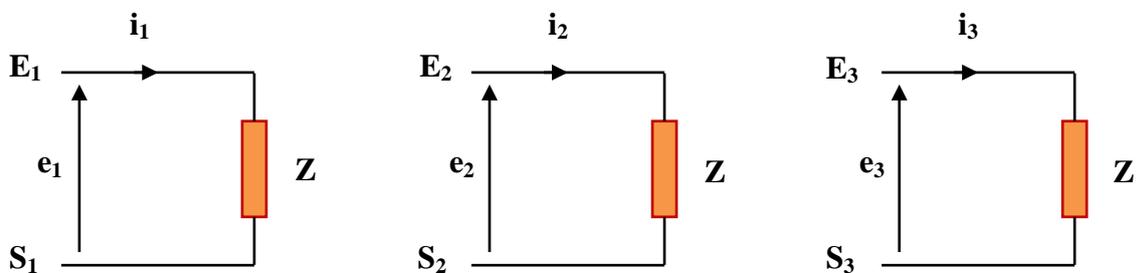
Ce qui donne vectoriellement :



Les 3 f.e.m ainsi obtenues forment un système triphase équilibré.

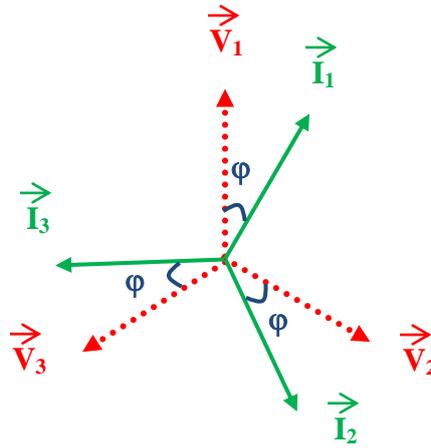
3°) Courant triphasés équilibrés

Relions les 3 bobines précédentes à 3 récepteurs identiques d'impédance \bar{Z} .



Si φ est le déphasage introduit par l'impédance \bar{Z} , l'expression des 3 courants sera :

$$\begin{cases} i_1 = I_m \sin(\omega t - \varphi) \\ i_2 = I_m \sin(\omega t - 2\pi/3 - \varphi) \\ i_3 = I_m \sin(\omega t - 4\pi/3 - \varphi) \end{cases} \quad \text{avec} \quad I_m = \frac{E_m}{|\bar{Z}|} \quad \text{et} \quad \varphi = \arg \bar{Z}$$



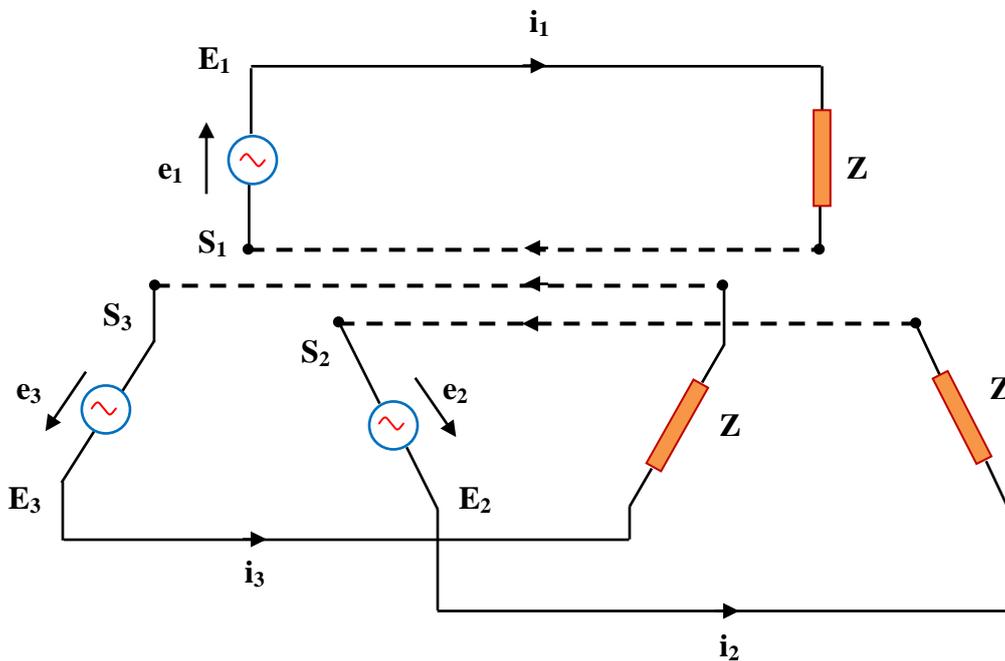
Les 3 courants ainsi obtenus forment un système triphase équilibré.

Remarque : On établit facilement, analytiquement ou vectoriellement, que
$$\begin{cases} e_1 + e_2 + e_3 = 0 \\ i_1 + i_2 + i_3 = 0 \end{cases}$$

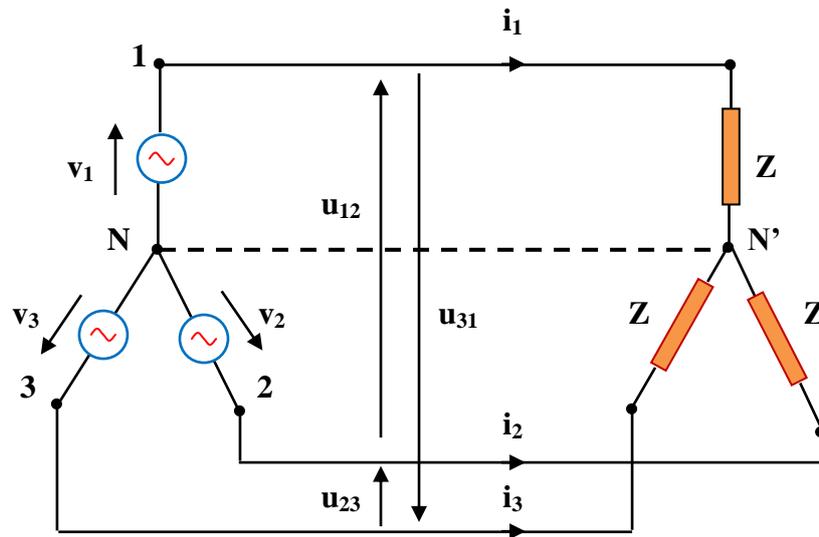
II- Distribution en courant triphasé

1°) Couplage étoile (Y)

Reprenons les 3 circuits précédents ainsi :



Si on réunit les 3 fils de retour, on obtient un fil unique parcouru par la somme des 3 courants. Pour un système équilibré, $i_1 + i_2 + i_3 = 0$ et on peut donc supprimer ce fil. D'où le montage étoile équilibré :



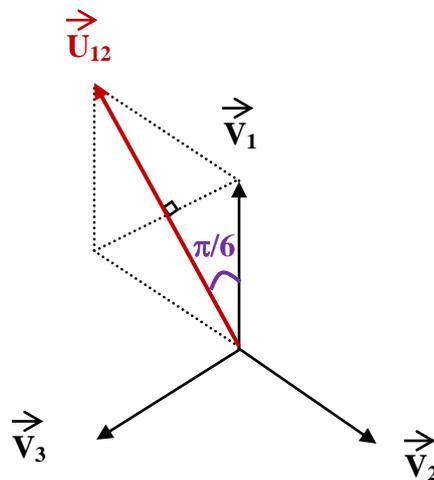
Notons que si les récepteurs ne sont identiques, il y'aura un courant dans le fil commun que l'on ne pourra supprimer. La distribution sera faite alors avec 4 fils. Les 3 fils principaux sont appelés fils de phase ou **phases**, le quatrième fil est appelé fil neutre ou **neutre**.

Les tensions v_1, v_2, v_3 entre phases et neutre sont appelées **tensions simples** ou tensions de phases.

On définit les **tensions composées** ou tensions entre phases par :

- u_{12} : tension entre la phase 1 et la phase 2 ;
- u_{23} : tension entre la phase 2 et la phase 3 ;
- u_{31} : tension entre la phase 3 et la phase 1.

A tout instant, on peut écrire $u_{12} = v_1 - v_2$ soit vectoriellement $\vec{U}_{12} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$.



\vec{U}_{12} est en avance de $\pi/6$ par rapport à \vec{V}_1 . En module $U_{12} = 2V_1 \cos \frac{\pi}{6} = V_1 \sqrt{3}$.

D'où $\vec{U}_{12} = \sqrt{3} \vec{V}_1 e^{j\pi/6}$.

On trouve des relations analogues entre \vec{U}_{23} et \vec{V}_2 ainsi qu'entre \vec{U}_{31} et \vec{V}_3 .

Donc entre les valeurs efficaces des tensions simples et composées existe la relation $U = V\sqrt{3}$.

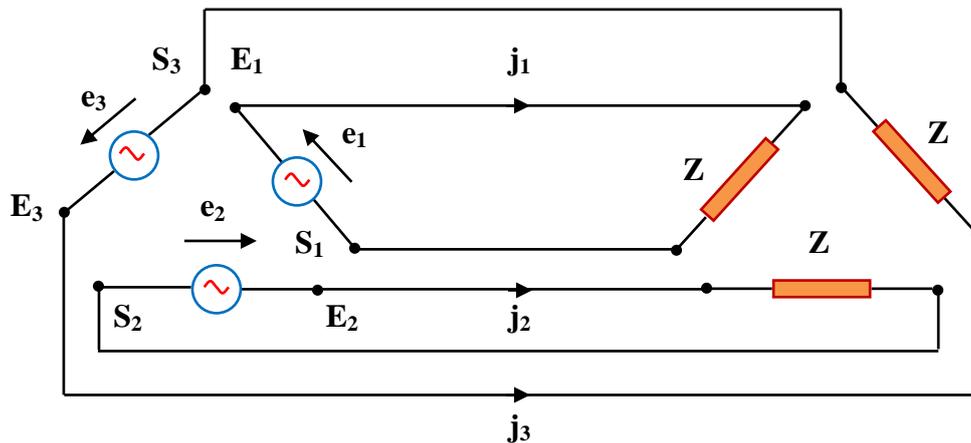
- Si $V = 127 \text{ V}$ $U = 220 \text{ V}$
- Si $V = 220 \text{ V}$ $U = 380 \text{ V}$ (réseau BT actuel)
- Si $V = 380 \text{ V}$ $U = 660 \text{ V}$.

On désigne généralement par **I** la valeur efficace des courants dans les fils de phases ou **courants de ligne**. Dans le cas d'un montage étoile, chaque branche du récepteur est parcourue par le courant **I**.

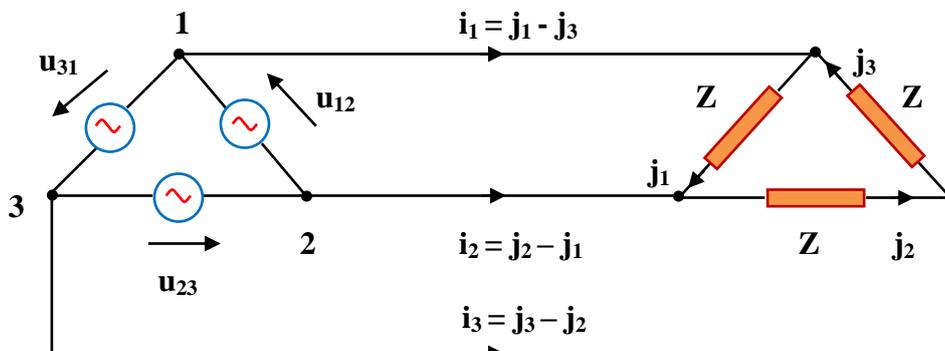
Conclusion : Dans le cas d'un couplage étoile, chaque branche du récepteur est soumise à la tension simple $V = U / \sqrt{3}$ et traversée par le courant de ligne **I**.

2°) **Couplage triangle (Δ ou D)**

Reprenons les 3 circuits initiaux et représentons les de la manière suivante :



On remarque qu'on ne modifie rien au fonctionnement de l'ensemble des 3 circuits en reliant E1 et S3. En effet on ne crée aucune nouvelle maille. De même on peut connecter E2 et S1. Enfin, comme $e_1 + e_2 + e_3 = 0$, les points E3 et S2 sont au même potentiel. On peut donc les relier sans perturber le fonctionnement du système. D'où le montage triangle équilibré :

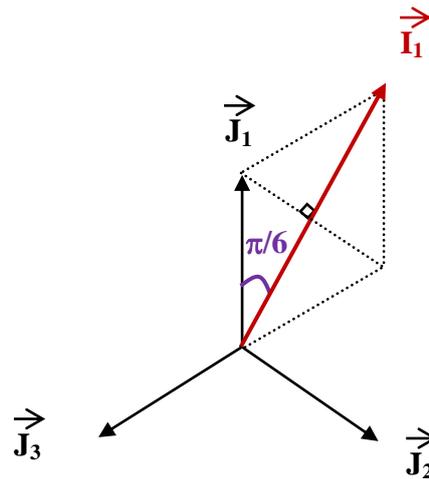


On désigne généralement par **J** la valeur efficace des **courants dans les branches ou les phases** du récepteur.

On voit que chaque phase du récepteur est soumise à la tension composée **U**. Quant aux courants on a :

- $i_1 = j_1 - j_3$ soit vectoriellement $\vec{I}_1 = \vec{J}_1 - \vec{J}_3$;
- $i_2 = j_2 - j_1$ soit vectoriellement $\vec{I}_2 = \vec{J}_2 - \vec{J}_1$;
- $i_3 = j_3 - j_2$ soit vectoriellement $\vec{I}_3 = \vec{J}_3 - \vec{J}_2$.

D'où le diagramme vectoriel :



\vec{I}_1 est en retard de $\pi/6$ par rapport à \vec{J}_1 . En module $I_1 = 2J_1 \cos \frac{\pi}{6} = J_1 \sqrt{3}$.

D'où $\bar{I}_1 = \sqrt{3} \bar{J}_1 e^{-j\pi/6}$.

On trouve des relations analogues entre \bar{I}_2 et \bar{J}_2 ainsi qu'entre \bar{I}_3 et \bar{J}_3 .

Donc entre les valeurs efficaces des courants de ligne et des courants de phase ou de branche existe la relation $I = J\sqrt{3}$.

Conclusion : Dans le cas d'un couplage triangle, chaque branche du récepteur est soumise à la tension composée U et traversée par le courant de branche $J = I/\sqrt{3}$.

3°) Installation triphasée

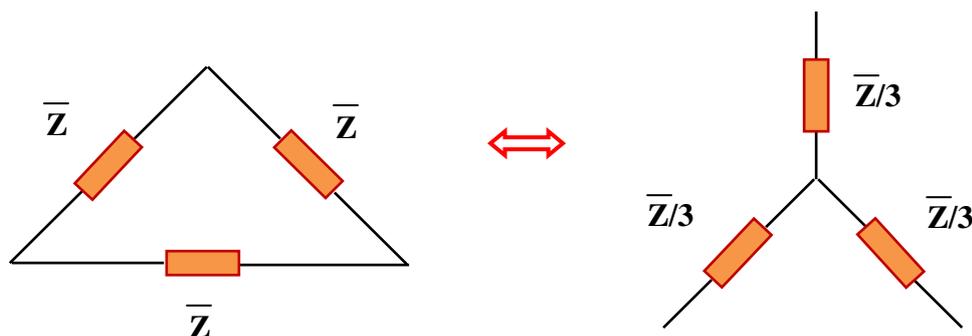
Elle comprend un générateur, une ligne de distribution et des récepteurs.

- Le générateur comporte 3 bornes accessibles (éventuellement 4 si le neutre est sorti) entre lesquelles existent des tensions de même fréquence. Pour un système triphasé équilibré, ces tensions ont la même valeur efficace et sont déphasées l'une par rapport à l'autre de $2\pi/3$. Si l'une de ces deux conditions n'est pas remplie, le système est dit déséquilibré.

- La ligne de distribution est un ensemble de 3 fils conducteurs de même section pour un montage sans neutre. On peut adjoindre un fil neutre de section généralement plus faible si la borne neutre est sortie côté générateur et côté récepteur.

- Le récepteur, lorsqu'il est équilibré, est constitué par 3 branches identiques.

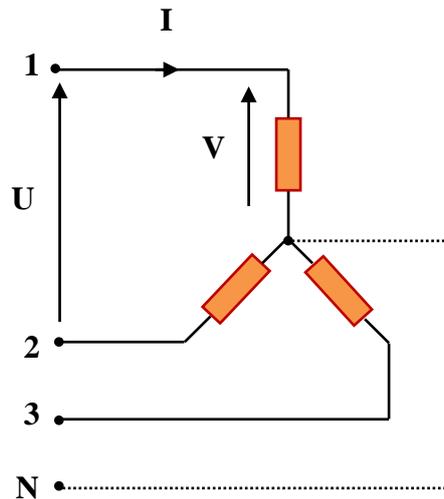
4°) Equivalence étoile – triangle



	triangle	étoile
résistances	R	R/3
inductances	L	L/3
capacités	C	3C

III- Puissances dans les systèmes triphasés équilibrés

1°) Couplage étoile

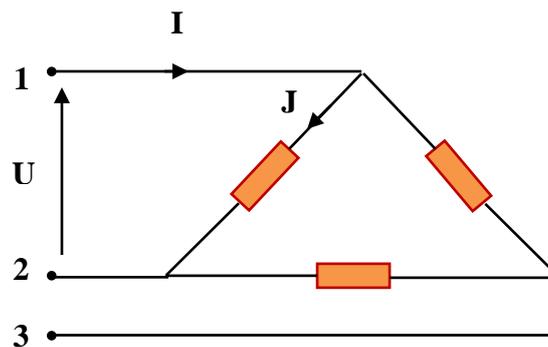


La puissance active absorbée par chaque phase du récepteur est $VI \cos \varphi$

La puissance totale absorbée est $P = 3VI \cos \varphi$

Or $V = U/\sqrt{3}$ donc donc $P = \sqrt{3} UI \cos \varphi$

2°) Couplage triangle



La puissance active absorbée par chaque phase du récepteur est $UJ \cos \varphi$

La puissance totale absorbée est $P = 3UJ \cos \varphi$

Or $J = I/\sqrt{3}$ donc $P = \sqrt{3} UI \cos \varphi$

On voit donc qu'en triphasé équilibré l'expression de la puissance active est la même en Y qu'en Δ :

$$P = \sqrt{3} UI \cos \varphi$$

On établit de même l'expression de la puissance réactive $Q = \sqrt{3} UI \sin \varphi$ et celle de la puissance apparente $S = \sqrt{3} UI$

Comme en monophasé, on a : $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$ et $\operatorname{tg} \varphi = \frac{Q}{P}$

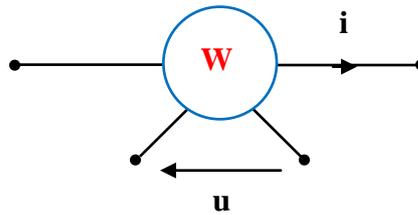
3°) Mesure des puissances

a- Principe du wattmètre

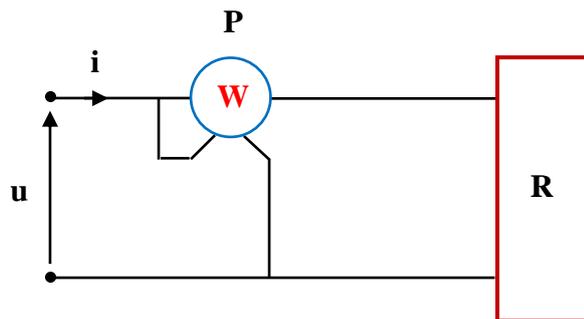
C'est un appareil qui mesure la valeur moyenne du produit $u(t).i(t)$. Pour cela il faut lui fournir deux informations : la tension et le courant.

Le wattmètre comporte 2 enroulements :

- un enroulement qui reçoit le courant et qu'il faut connecter en série avec le récepteur ;
- un enroulement qui reçoit la tension et qu'il faut brancher en parallèle avec le récepteur.



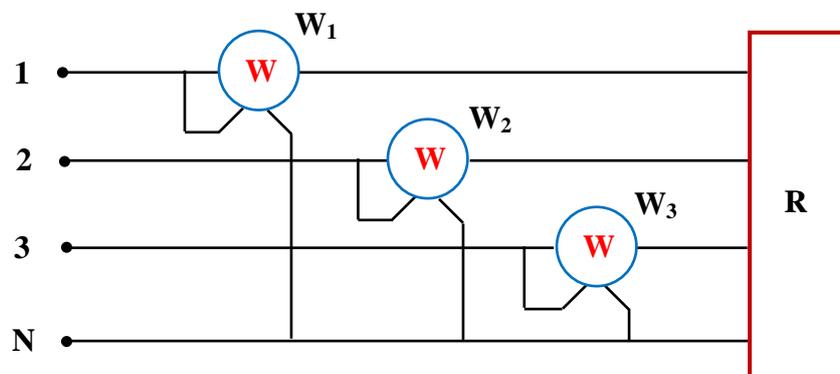
La mesure de la puissance active absorbée par un récepteur monophasé se fait ainsi :



b- Application à la mesure de puissances en triphasé

Il existe plusieurs méthodes pour mesurer P et Q. Les plus couramment utilisées sont la méthode des « 3 wattmètres », la méthode des « 2 wattmètres » et la méthode de « Boucherot ».

– Méthode des « 3 wattmètres » :



$$P = W_1 + W_2 + W_3$$

Si le système est équilibré, les 3 wattmètres donnent la même indication ($W_1 = W_2 = W_3 = W$) et il suffit d'un seul pour mesurer la puissance active : $P = 3 W$

- Méthode des « 2 wattmètres » :

Pour toute liaison triphasée, la puissance instantanée (couplage étoile) s'écrit :

$$p = v_1 i_1 + v_2 i_2 + v_3 i_3 .$$

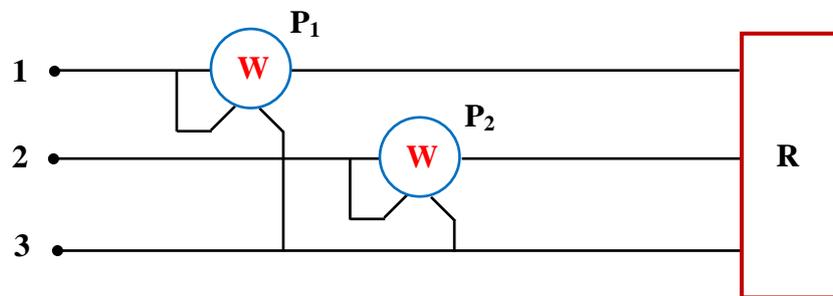
Puisque le système est équilibré $i_N = 0$, alors $i_3 = -i_1 - i_2$.

$$p = v_1 i_1 + v_2 i_2 + v_3 (-i_1 - i_2) = (v_1 - v_3) i_1 + (v_2 - v_3) i_2 = u_{13} i_1 + u_{23} i_2 .$$

$$\text{Donc } P = \langle p \rangle = \langle u_{13} i_1 \rangle + \langle u_{23} i_2 \rangle .$$

Si on fait passer i_1 dans le circuit courant d'un wattmètre et si on applique u_{13} à ses bornes tension, il indique $P_1 = \langle u_{13} i_1 \rangle$.

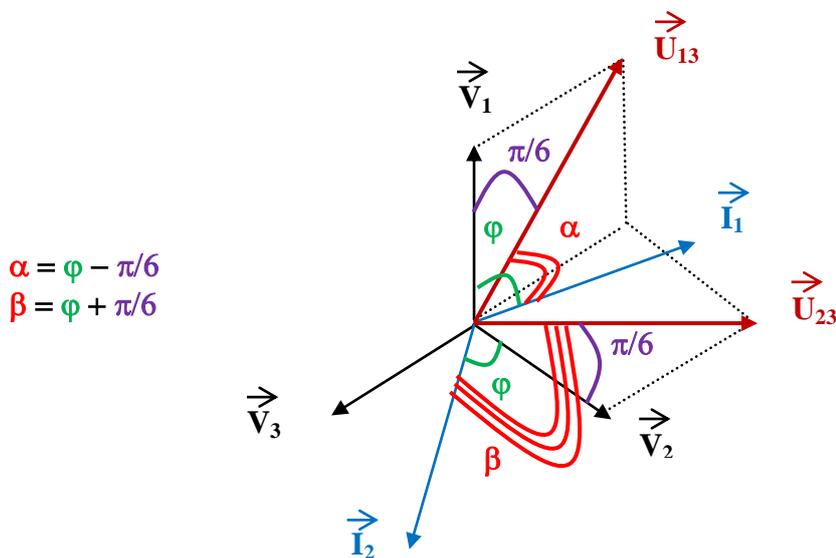
De même un second wattmètre parcouru par i_2 et alimenté sous u_{23} indique $P_2 = \langle u_{23} i_2 \rangle$.



$$P = P_1 + P_2$$

$$\begin{cases} P_1 = U_{13} I_1 \cos(\vec{U}_{13} \wedge, \vec{I}_1) \\ P_2 = U_{23} I_2 \cos(\vec{U}_{23} \wedge, \vec{I}_2) \end{cases}$$

Puisque les courants et les tensions sont équilibrés et sinusoïdaux :

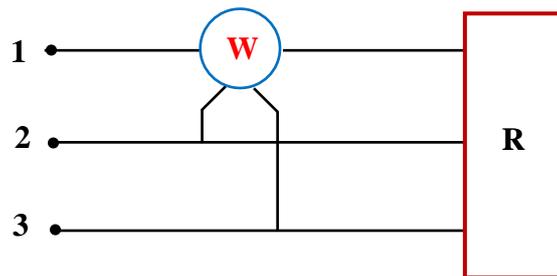
$$\begin{cases} P_1 = UI \cos(\vec{U}_{13} \wedge, \vec{I}_1) \\ P_2 = UI \cos(\vec{U}_{23} \wedge, \vec{I}_2) \end{cases}$$


$$\Rightarrow \begin{cases} P_1 = UI \cos(\varphi - \pi/6) \\ P_2 = UI \cos(\varphi + \pi/6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_1 + P_2 = UI \cos(\varphi - \pi/6) + UI \cos(\varphi + \pi/6) = 2UI \cos \varphi \cos \pi/6 = \sqrt{3}UI \cos \varphi = P \\ P_1 - P_2 = UI \cos(\varphi - \pi/6) - UI \cos(\varphi + \pi/6) = 2UI \sin \varphi \sin \pi/6 = UI \sin \varphi = Q/\sqrt{3} \end{cases}$$

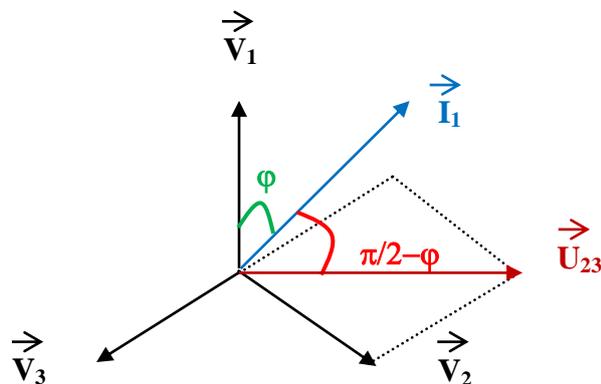
Donc outre $P = P_1 + P_2$ on obtient $Q = \sqrt{3}(P_1 - P_2)$

- Méthode de Boucherot :



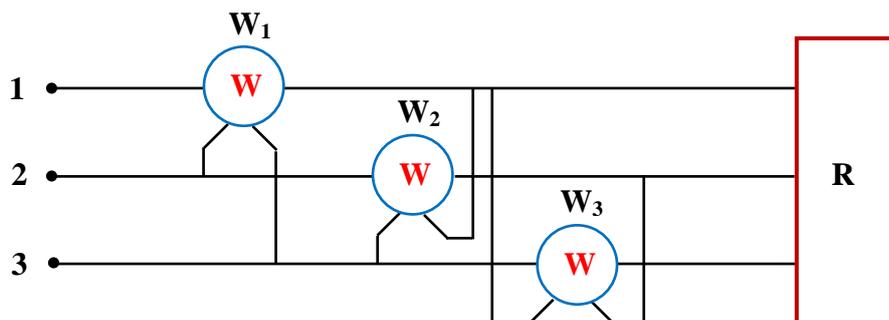
$$W = W_{23}^1 = U_{23} I_1 \cos(\vec{U}_{23} \wedge, \vec{I}_1)$$

Si le système est équilibré en tensions et en courants : $W = UI \cos(\vec{U}_{23} \wedge, \vec{I}_1)$



$$W = UI \cos(\pi/2 - \varphi) = UI \sin \varphi = Q/\sqrt{3} \Rightarrow Q = \sqrt{3}W$$

Remarque : Pour un système déséquilibré, la mesure de Q sera effectuée avec 3 wattmètres selon le schéma de montage suivant :



$$Q = \frac{W_1 + W_2 + W_3}{\sqrt{3}}$$

IV- Amélioration du facteur de puissance d'une installation triphasée

Pour améliorer le facteur de puissance d'une installation triphasée, on utilise une batterie de trois condensateurs couplés en triangle. En effet, la capacité de chaque condensateur est 3 fois plus faible qu'en étoile, il y'a donc plus d'économie et moins d'encombrement.

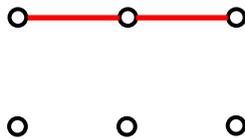
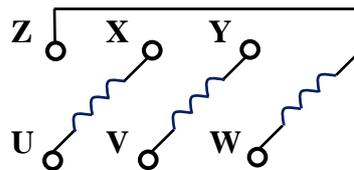
Avant amélioration, l'installation consomme **P** et **Q**. Son facteur de puissance est **cos φ**.

Après amélioration, l'installation consomme **P'** et **Q'**. Son facteur de puissance est **cos φ'**.

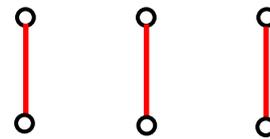
D'après le théorème de Boucherot :

$$\begin{cases} P' = P + P_c = P + 0 = P \\ Q' = Q + Q_c = Q - 3C\omega U^2 \Rightarrow P \operatorname{tg}\varphi' = P \operatorname{tg}\varphi - 3C\omega U^2 \end{cases} \Rightarrow C = \frac{P(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi')}{3\omega U^2}$$

V- Réalisation pratique des couplages étoile et triangle



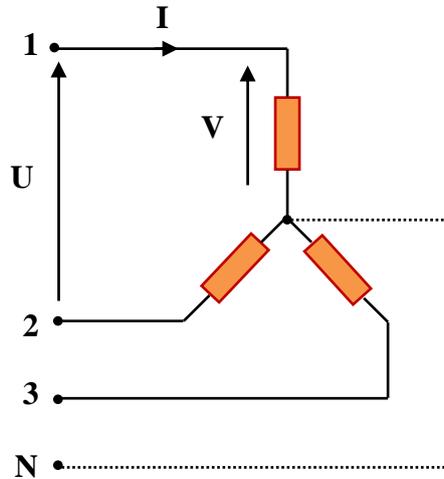
couplage étoile



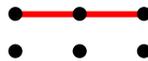
couplage triangle

Résumé

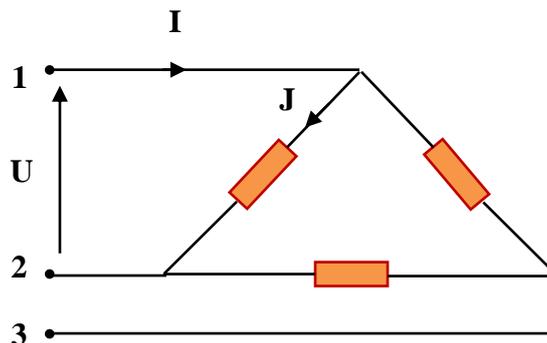
Couplage étoile (Y)



Chaque branche du récepteur est soumise à la tension simple $V = U/\sqrt{3}$ et traversée par le courant de ligne I



Couplage triangle (Δ ou D)



Chaque branche du récepteur est soumise à la tension composée U et traversée par le courant de branche $J = I/\sqrt{3}$



Equivalence étoile – triangle

\bar{Z} en triangle \longleftrightarrow $\bar{Z}/3$ en étoile

$R \longleftrightarrow R/3$; $L \longleftrightarrow L/3$; $C \longleftrightarrow 3C$

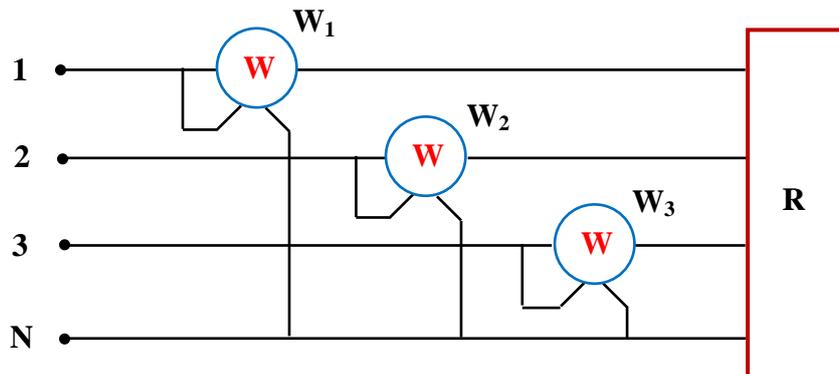
Expressions des puissances

$$\left. \begin{array}{l} P = \sqrt{3}UI \cos \varphi \\ Q = \sqrt{3}UI \sin \varphi \\ S = \sqrt{3}UI \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} S = \sqrt{P^2 + Q^2} \\ \text{tg } \varphi = \frac{Q}{P} \end{array} \right.$$

Autres expressions de P et Q

$$Y : \begin{cases} P = 3RI^2 \text{ ou } 3\frac{V^2}{R} = \frac{U^2}{R} \\ Q = 3XI^2 \text{ ou } 3\frac{V^2}{X} = \frac{U^2}{X} \end{cases} \quad \Delta : \begin{cases} P = 3RJ^2 = RI^2 \text{ ou } 3\frac{U^2}{R} \\ Q = 3XJ^2 = XI^2 \text{ ou } 3\frac{U^2}{X} \end{cases}$$

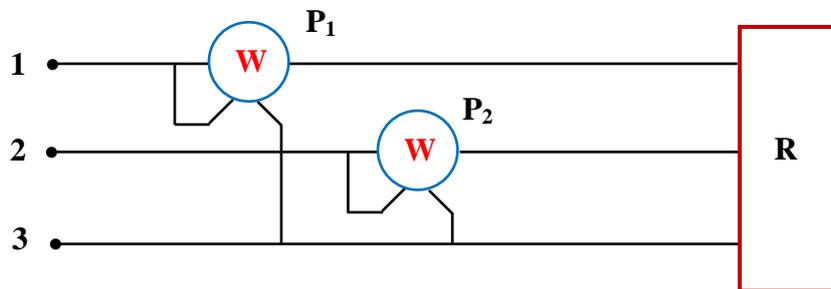
Méthode des « 3 wattmètres »



$P = W_1 + W_2 + W_3$

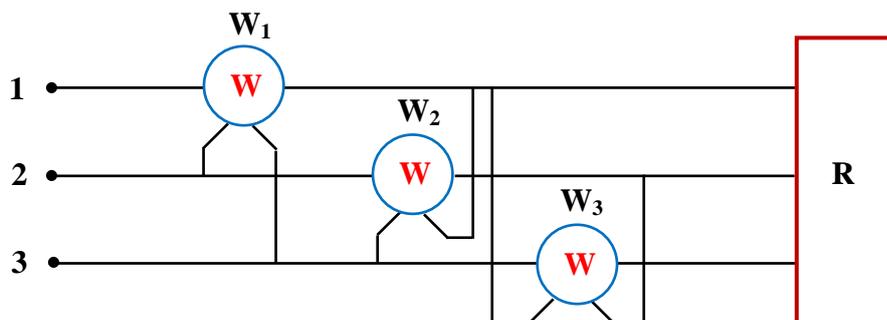
Si le système est équilibré $W_1 = W_2 = W_3 = W$ et $P = 3W$

Méthode des « 2 wattmètres »



Si le système est équilibré : $\begin{cases} P = P_1 + P_2 \\ Q = \sqrt{3}(P_1 - P_2) \end{cases}$ avec $\begin{cases} P_1 = UI \cos(\varphi - \pi/6) \\ P_2 = UI \cos(\varphi + \pi/6) \end{cases}$

Méthode de « Boucherot »



$$Q = \frac{W_1 + W_2 + W_3}{\sqrt{3}}$$

Si le système est équilibré $W_1 = W_2 = W_3 = W$ et $Q = \sqrt{3}W$

Amélioration du facteur de puissance d'une installation triphasée

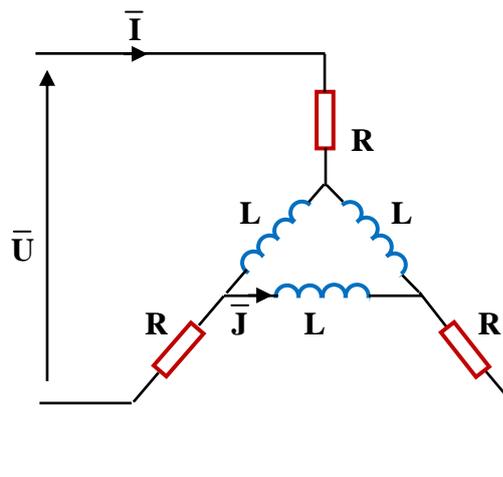
Pour améliorer le facteur de puissance d'une installation triphasée, on utilise une batterie de trois condensateurs couplés en triangle. En effet, la capacité C de chaque condensateur est 3 fois plus faible qu'en étoile, il y'a donc plus d'économie et moins d'encombrement.

$$C = \frac{P(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi')}{3\omega U^2}$$

Exercices d'application

Exercice I

Soit un récepteur alimenté par un système de tensions triphasé équilibré de tension composée $U=380V$ et de fréquence $f=50Hz$. On donne $R=10\Omega$ et $L=20mH$.



- 1°) Donner le schéma équivalent en étoile du récepteur.
- 2°) Donner l'expression de l'impédance complexe \bar{Z} de chaque branche du récepteur. Calculer son module et son argument.
- 3°) Calculer les valeurs efficaces I et J_L des courants \bar{I}_L et \bar{J}_L .
- 4°) En utilisant deux méthodes différentes, calculer les puissances active P et réactive Q consommées par le récepteur.
- 5°) Calculer l'indication W_{1N}^1 d'un wattmètre permettant de mesurer la puissance active par la méthode des "trois wattmètres". Donner le schéma de branchement du wattmètre.
- 6°) En utilisant deux méthodes différentes, calculer les indications $P_1 = W_{13}^1$ et $P_2 = W_{23}^2$ des deux wattmètres lorsqu'on fait la mesure par la méthode des "deux wattmètres". Donner le schéma de branchement des deux wattmètres.
- 7°) Calculer l'indication W_{23}^1 d'un wattmètre permettant de mesurer la puissance réactive par la méthode de Boucherot. Donner le schéma de branchement du wattmètre.

Exercice II

On veut transporter, à une distance de 50Km, une puissance de 50MW.

1°) On utilise une ligne triphasée à trois câbles de tension composée 60KV.

En adoptant un facteur de puissance $\cos \varphi = 0,8$, calculer :

- a- la valeur efficace I du courant en ligne ;
- b- la section s d'un câble si on admet une densité de courant $j = 3\text{A/mm}^2$;
- c- la résistance d'un câble sachant qu'il est en cuivre de résistivité $\rho = 1,6 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$;
- d- la puissance totale P_J perdue par effet Joule ;
- e- la masse m de cuivre utilisée pour la ligne sachant que la masse volumique du cuivre est $\mu = 8,85\text{t/m}^3$.

2°) On utilise désormais une ligne à deux câbles de tension 60KV (biphasée) présentant les mêmes pertes par effet Joule que la ligne précédente.

En adoptant un facteur de puissance $\cos \varphi = 0,8$, calculer :

- a- la valeur efficace I' du courant en ligne ;
- b- la résistance R' d'un câble ;
- c- la section s' d'un câble ;
- d- la masse m' de cuivre utilisée.

3°) En déduire le rapport pour une même puissance transportée, avec les mêmes pertes par effet Joule. Conclure.

Exercice III

Un récepteur triphasé équilibré est alimenté par un réseau triphasé 380V - 50Hz

Lors de la mesure de puissances consommées en utilisant la méthode des « deux wattmètres », on a relevé les indications suivantes : $P_1 = 15\text{KW}$ et $P_2 = 6\text{KW}$.

1°) Calculer les puissances active P et réactive Q consommées.

2°) Calculer le courant de ligne I et le facteur de puissance $\cos \varphi$ du récepteur.

3°) On suppose que le récepteur est couplé en étoile. Chaque branche est constituée d'une résistance R en parallèle avec une inductance L.

a- Calculer R et L.

b- Calculer les courants I_R et I_L circulant respectivement dans R et L.

4°) On branche aux bornes du récepteur précédent trois condensateurs identiques, couplés en triangle, de capacité $C = 40 \mu\text{F}$ chacun.

a- Calculer les nouvelles puissances active P' et réactive Q' consommées. Conclure.

b- Calculer le nouveau courant de ligne I' et le nouveau facteur de puissance $\cos \varphi'$ du récepteur. Conclure.

Exercice IV

Une installation alimentée par un réseau triphasé équilibré (4 fils, 220/380V, 50Hz) comporte :

- 150 lampes de 220V - 100W chacune ;
- 1 moteur triphasé couplé en étoile, de puissance utile 20KW avec un rendement $\eta_M = 80\%$ et un facteur de puissance $\cos \varphi_M = 0,75$;
- Un four inductif triphasé couplé en triangle, absorbant une puissance active de 40KW et une puissance réactive de 38KVAR.

1°) Proposer un schéma simplifié de cette installation équilibrée.

2°) En effectuant le bilan de puissances, calculer les puissances active P et réactive Q consommées.

3°) En déduire le courant de ligne et le facteur de puissance de cette installation.

4°) Calculer le courant traversant :

- a- chaque lampe ;
- b- chaque enroulement du moteur ;
- c- chaque phase du four.

5°) Afin d'améliorer le facteur de puissance à $\cos \varphi' = 0,92$, on branche aux bornes de l'installation une batterie de trois condensateurs identiques, couplés en triangle.

- a- Calculer la capacité C de chaque condensateur.
- b- Quelle serait la valeur de la capacité si les condensateurs étaient couplés en étoile ?

Conclure.

Ch V : Circuits magnétiques

I- Rappels et définitions

1°) Matériaux magnétiques

Ce sont des matériaux **ferromagnétiques** susceptibles d'acquérir une aimantation (magnétisation) macroscopique importante sous l'action d'un champ magnétique, même relativement faible.

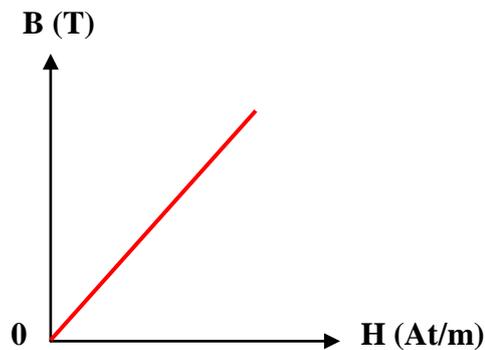
Les matériaux magnétiques sont caractérisés par leur courbe d'aimantation $B=f(H)$.

\vec{H} : excitation magnétique.

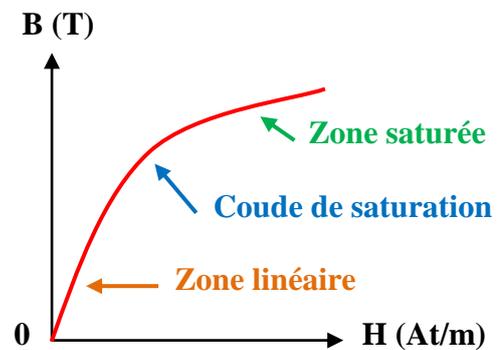
\vec{B} : champ magnétique ou induction magnétique.

Pour un matériau **non magnétique** (l'air en particulier) la courbe $B=f(H)$ est une droite de pente $\mu = \mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ H/m.

Pour un **matériau magnétique**, cette courbe comporte une zone linéaire caractérisée par une perméabilité magnétique $\mu = B/H$ constante et une zone de saturation.



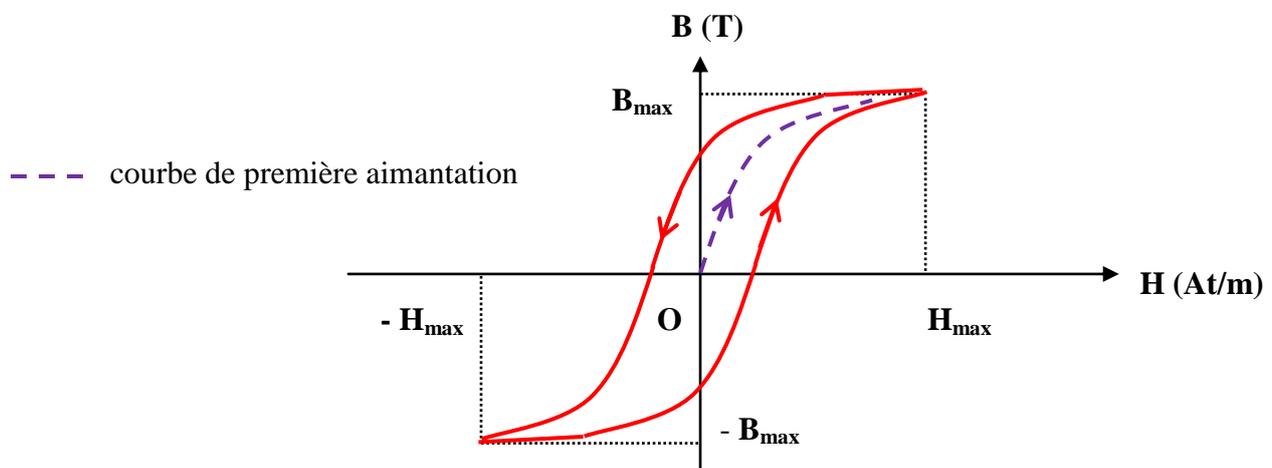
matériau non magnétique



matériau magnétique

Quand on parle de la perméabilité magnétique d'un matériau, il s'agit bien sûr de sa valeur dans la zone linéaire. $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$ où μ_r est la perméabilité relative du matériau.

En plus de la non linéarité due à la saturation, la caractéristique $B=f(H)$ possède une autre non linéarité due à l'hystérésis. En effet, en faisant varier H de 0 à H_{\max} puis de H_{\max} à $-H_{\max}$ et ensuite de $-H_{\max}$ à H_{\max} , on ne décrit pas la même courbe. On décrit un cycle d'hystérésis symétrique par rapport à 0.



Les matériaux magnétiques utilisés en électrotechnique se classent en 2 familles : les matériaux magnétiques « doux » et les matériaux magnétiques « durs ».

Les premiers sont facilement aimantés et présentent des pertes par hystérésis faibles. On les utilise dans la construction des transformateurs et des machines tournantes.

Les seconds nécessitent un champ très élevé pour être aimantés. Mais une fois aimantés, ils y restent d'une façon permanente et durable. On les utilise dans la réalisation d'aimants permanents.

2°) Théorèmes fondamentaux

a- Théorème d'Ampère

La circulation de l'excitation magnétique \vec{H} le long d'une courbe fermée quelconque (C) est égale à la somme algébrique des courants enlacés par cette courbe.

$$\oint_{(C)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_i I_i$$

b- Théorème de la conservation du flux

Le flux de l'induction magnétique \vec{B} sortant d'une surface fermée quelconque (S) est nul.

$$\oiint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Remarque : Le flux est la grandeur conservative des circuits magnétiques. Il joue un rôle analogue à celui d'un courant dans les circuits électriques.

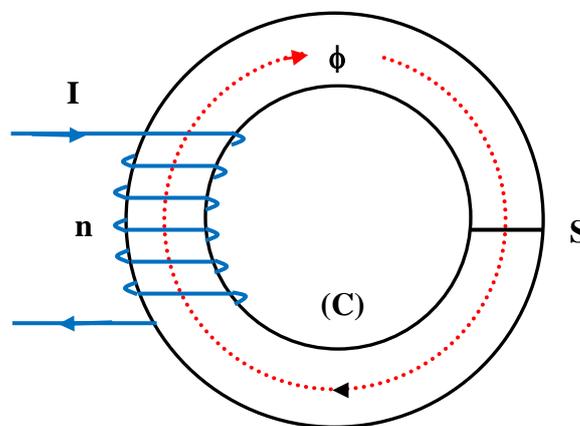
II- Etude des circuits magnétiques sans fuites

Ce sont des circuits magnétiques où le flux est totalement canalisé.

1°) Circuits magnétiques linéaires (non saturés)

a- Loi d'Ampère

Considérons un circuit magnétique de perméabilité relative $\mu_r \gg 1$, sur lequel sont enroulées n spires.



Le théorème d'Ampère appliqué le long de la ligne de champ (C) donne : $\int_{(C)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = nI \Rightarrow Hl = nI$

On néglige le phénomène d'hystérésis, en supposant le matériau décrit par sa courbe de 1^{ère} aimantation.

Le circuit magnétique est non saturé donc $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ ($\mu = \text{cte}$).

Le flux à travers la surface (S) est : $\phi = \mathbf{B}\mathbf{S} = \mu\mathbf{H}\mathbf{S} \Rightarrow n\mathbf{I} = \frac{l}{\mu\mathbf{S}} \phi$

On pose $\mathfrak{R} = \frac{l}{\mu\mathbf{S}}$: expression analogue à la résistance d'un conducteur ($\mathbf{R} = \frac{l}{\sigma\mathbf{S}}$).

\mathfrak{R} s'appelle la réductance du circuit magnétique. L'unité est le Henry⁻¹ (H⁻¹).

En posant $\xi = n\mathbf{I}$ on aura $\xi = \mathfrak{R}\phi$

ξ analogue à une f.e.m, s'appelle force magnétomotrice (f.m.m). L'unité est l'Ampère tours (At).

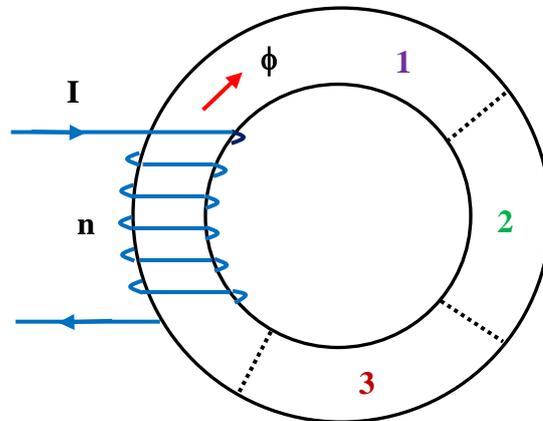
En conséquence ϕ est analogue à un courant. L'unité est le Weber (Wb).

$\xi = n\mathbf{I} = \mathfrak{R}\phi$: s'appelle la loi d'Ohm des circuits magnétiques ou loi d'Hopkinson.

Remarque : Il y'a une parfaite analogie entre les circuits électriques et les circuits magnétiques

b- Association de circuits magnétiques linéaires

- Association série



D'après le théorème d'Ampère $n\mathbf{I} = \mathbf{H}_1 l_1 + \mathbf{H}_2 l_2 + \mathbf{H}_3 l_3$

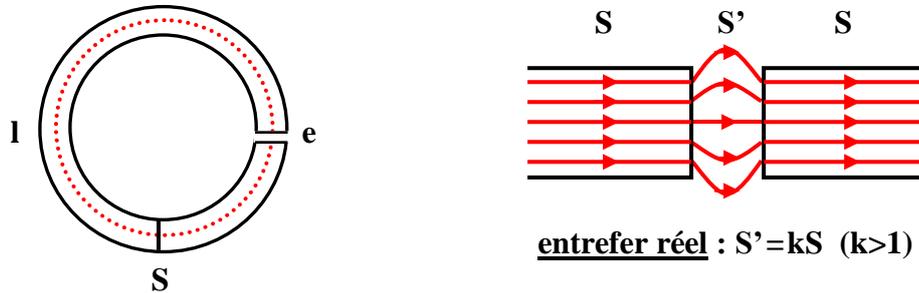
Le flux magnétique est conservatif $\Rightarrow \phi = \mathbf{B}_1 \mathbf{S}_1 = \mathbf{B}_2 \mathbf{S}_2 = \mathbf{B}_3 \mathbf{S}_3 = \mu_1 \mathbf{H}_1 \mathbf{S}_1 = \mu_2 \mathbf{H}_2 \mathbf{S}_2 = \mu_3 \mathbf{H}_3 \mathbf{S}_3$

$$\Rightarrow n\mathbf{I} = \left(\frac{l_1}{\mu_1 \mathbf{S}_1} + \frac{l_2}{\mu_2 \mathbf{S}_2} + \frac{l_3}{\mu_3 \mathbf{S}_3} \right) \phi \Rightarrow \mathfrak{R}\phi = (\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3) \phi \Rightarrow \mathfrak{R} = \sum_i \mathfrak{R}_i$$

La réductance équivalente de plusieurs circuits en série est égale à la somme des réductances des différents circuits.

Application à un circuit comportant un entrefer :

Soit un circuit magnétique constitué d'un matériau de perméabilité relative $\mu_r = 1000$, de longueur $l = 1\text{m}$, de section S constante, présentant un entrefer d'épaisseur $e = 1\text{mm}$.
On suppose que les lignes de champ ne débordent pas trop de la section S .



La réluctance du circuit est $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\text{fer}} + \mathcal{R}_e$ avec $\mathcal{R}_{\text{fer}} = \frac{l - e}{\mu_0 \mu_r S} \approx \frac{l}{\mu_0 \mu_r S}$ et $\mathcal{R}_e = \frac{e}{\mu_0 S}$

$$\frac{\mathcal{R}_{\text{fer}}}{\mathcal{R}_e} = \frac{l}{\mu_r \cdot e} = 1 \Rightarrow \mathcal{R}_{\text{fer}} = \mathcal{R}_e$$

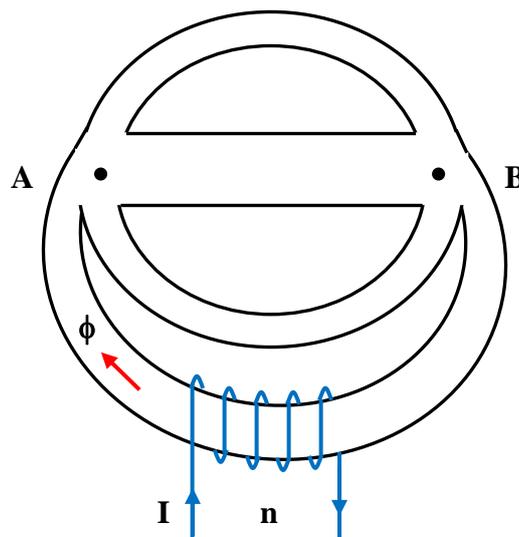
Donc 1mm d'air a la même réluctance qu'1m de fer. Il faudra alors utiliser une f.m.m aussi grande pour faire passer le même flux dans 1mm d'air que dans 1m de fer.

Conclusion : Les entrefers doivent avoir des faibles épaisseurs.

De même $\phi = \mathbf{B}_{\text{fer}} S = \mathbf{B}_e S \Rightarrow \mathbf{B}_{\text{fer}} = \mathbf{B}_e \Rightarrow \mathbf{H}_e = \mu_r \mathbf{H}_{\text{fer}}$ c-à-d $\mathbf{H}_e = 1000 \mathbf{H}_{\text{fer}}$.

Conclusion : L'intérêt de ménager des entrefers est la possibilité d'obtenir des valeurs élevées du champ magnétique.

- Association parallèle



Le flux est conservatif $\Rightarrow \phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3$

La d.d.p magnétique $v_A - v_B = \mathcal{R}_1 \phi_1 = \mathcal{R}_2 \phi_2 = \mathcal{R}_3 \phi_3$

Si \mathcal{R} est la réluctance équivalente de la branche AB, alors $v_A - v_B = \mathcal{R} \phi$

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 \Rightarrow \frac{v_A - v_B}{\mathfrak{R}} = \frac{v_A - v_B}{\mathfrak{R}_1} + \frac{v_A - v_B}{\mathfrak{R}_2} + \frac{v_A - v_B}{\mathfrak{R}_3} \Rightarrow \frac{1}{\mathfrak{R}} = \sum_i \frac{1}{\mathfrak{R}_i} \text{ ou } P = \sum_i P_i$$

$P = \frac{1}{\mathfrak{R}}$ est appelée perméance. L'unité est le Henry (H).

La perméance équivalente de plusieurs circuits en parallèle est égale à la somme des perméances des différents circuits.

2°) Circuits magnétiques non linéaires

$\mu = \frac{B}{H}$ n'est plus une constante et les formules précédentes s'appliquent point par point. On étudie alors ces circuits par la méthode des « caractéristiques partielles ».

III- Circuit magnétique traversé par un flux variable – Pertes fer

Un flux variable traversant un circuit magnétique y génère des pertes qui se traduisent par un échauffement. Ces pertes ont 2 causes : l'hystérésis et les courants de Foucault.

1°) Pertes par hystérésis

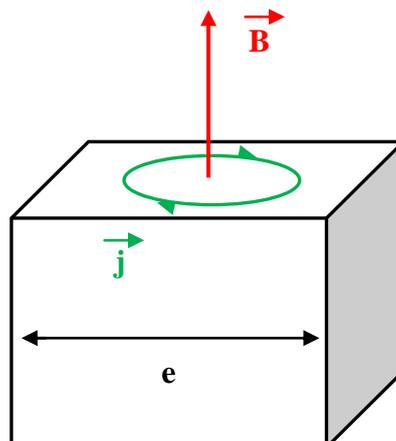
On démontre qu'un échantillon de matériau magnétique soumis à un champ variable tel qu'il décrit un cycle d'hystérésis complet, absorbe une énergie égale à l'aire du cycle multiplié par le volume de l'échantillon.

Donc si le cycle est décrit f fois par seconde c-à-d si le champ est alternatif de fréquence f , les pertes d'énergie par seconde c-à-d la puissance dissipée aura pour expression : $P_H = f \cdot V \cdot A$
(V : volume de l'échantillon ; A : aire du cycle).

L'aire du cycle étant approximativement proportionnelle à B_{\max}^2 , on aura : $P_H = k_H \cdot V \cdot f \cdot B_{\max}^2$
(k_H : coefficient dépendant de la nature du matériau).

2°) Pertes par courants de Foucault

L'équation de Maxwell $\text{rot } \vec{j} = -\sigma \frac{d\vec{B}}{dt}$ établit une relation entre un phénomène d'induction magnétique variable dans le temps et une densité de courant dans un milieu conducteur.
(j : densité de courant ; σ : conductivité).



Il découle de ce phénomène des pertes par courants de Foucault P_{CF} .

On démontre que les pertes P_{CF} sont proportionnelles à V , e^2 , f^2 et B_{\max}^2 .

Donc : $P_{CF} = k_{CF} \cdot V \cdot e^2 \cdot f^2 \cdot B_{\max}^2$ (k_{CF} : coefficient dépendant de la nature du matériau).

En pratique, les circuits magnétiques traversés par un flux variable sont feuilletés. Ils sont réalisés par empilement de tôles disposées parallèlement aux lignes d'induction et isolées par un vernis.

3°) Pertes fer

On appelle pertes fer la somme des pertes par hystérésis et des pertes par courants de Foucault.

$$P_{\text{fer}} = V \cdot B_{\max}^2 (k_H \cdot f + k_{CF} \cdot e^2 \cdot f^2)$$

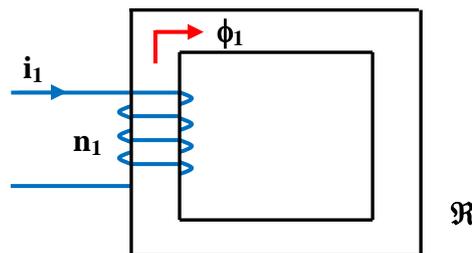
Pour réduire les pertes par hystérésis, on ajoute du silicium dans le fer (< 4%).

Pour réduire les pertes par courant de Foucault, on feuillète le fer.

Donc pour réduire les pertes fer, on utilise des tôles en fer silicié.

IV- Inductance propre d'une bobine à noyau de fer

Considérons le circuit magnétique suivant, supposé parfait et de réluctance \mathfrak{R} .

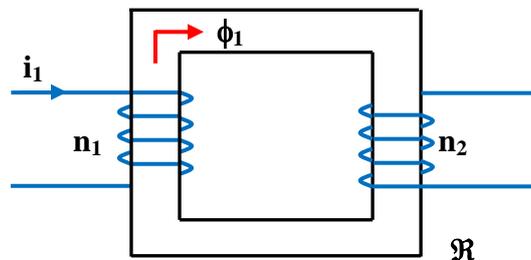


Le flux ϕ_1 produit par la f.m.m $n_1 i_1$ traverse intégralement le circuit magnétique et on a : $n_1 i_1 = \mathfrak{R} \phi_1$

Par définition, l'inductance propre de la bobine est : $L_1 = \frac{n_1 \phi_1}{i_1} = \frac{n_1^2}{\mathfrak{R}}$

V- Inductance mutuelle de deux bobines à noyau de fer

Soit une 2^{ème} bobine ouverte, montée sur le circuit magnétique et comportant n_2 spires.



On définit l'inductance mutuelle des bobines 1 et 2 par : $M = \frac{n_2 \phi_1}{i_1} = \frac{n_1 n_2}{\mathfrak{R}}$

Résumé

Relation entre B et H

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \text{ avec } \mu = \mu_0 \mu_r$$

μ : perméabilité magnétique du matériau.

μ_0 : perméabilité magnétique du vide ($\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ H/m).

μ_r : perméabilité relative.

Théorème d'Ampère

La circulation de l'excitation magnétique \vec{H} le long d'une courbe fermée quelconque (C) est égale à la somme algébrique des courants enlacés par cette courbe :

$$\int_{(C)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_i I_i$$

Théorème de la conservation du flux

Le flux de l'induction magnétique \vec{B} sortant d'une surface fermée quelconque (S) est nul :

$$\oiint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Loi d'Hopkinson

$$\xi = nI = \mathfrak{R}\phi$$

ξ : force magnétomotrice (f.m.m). Unité : At.

ϕ : flux. Unité : Wb.

\mathfrak{R} : réluctance du circuit magnétique. $\mathfrak{R} = l / \mu S$. Unité : H^{-1} .

Association série

$$\mathfrak{R} = \sum_i \mathfrak{R}_i$$

Association parallèle

$$\frac{1}{\mathfrak{R}} = \sum_i \frac{1}{\mathfrak{R}_i}$$

Pertes par hystérésis

$$P_H = k_H \cdot V \cdot f \cdot B_{\max}^2$$

k_H : coefficient dépendant de la nature du matériau.

V : volume de l'échantillon.

f : fréquence.

B_{\max} : induction maximale.

Pertes par courants de Foucault

$$P_{CF} = k_{CF} \cdot V \cdot e^2 \cdot f^2 \cdot B_{\max}^2$$

k_{CF} : coefficient dépendant de la nature du matériau.

e : épaisseur de l'échantillon.

Pertes fer

$$P_{fer} = P_H + P_{CF} = V \cdot B_{\max}^2 (k_H \cdot f + k_{CF} \cdot e^2 \cdot f^2)$$

Pour réduire les pertes fer, on utilise des tôles en fer silicié.

Inductance d'une bobine à noyau de fer

$$L = \frac{n^2}{\mathfrak{R}} \text{ où } n \text{ est le nombre de spires de la bobine.}$$

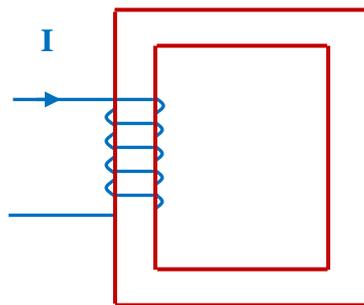
Inductance mutuelle de deux bobines à noyau de fer

$$M = \frac{n_1 n_2}{\mathfrak{R}} \text{ où } n_1 \text{ et } n_2 \text{ sont les nombres de spires des deux bobines.}$$

Exercices d'application

Exercice I

Un circuit magnétique, sans fuites, de section constante et de longueur moyenne $l = 20\text{cm}$, comporte une bobine de $n = 150$ spires parcourues par un courant I . On donne $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H/m}$.



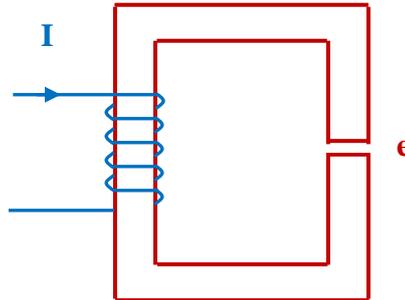
Le circuit magnétique est réalisé par un matériau caractérisé par une perméabilité relative constante $\mu_r = 2000$.

1°) En utilisant le théorème d'Ampère, calculer l'induction magnétique B qu'on obtient avec un courant $I = 1\text{A}$.

2°) Retrouver le même résultat en utilisant la loi d'Hopkinson.

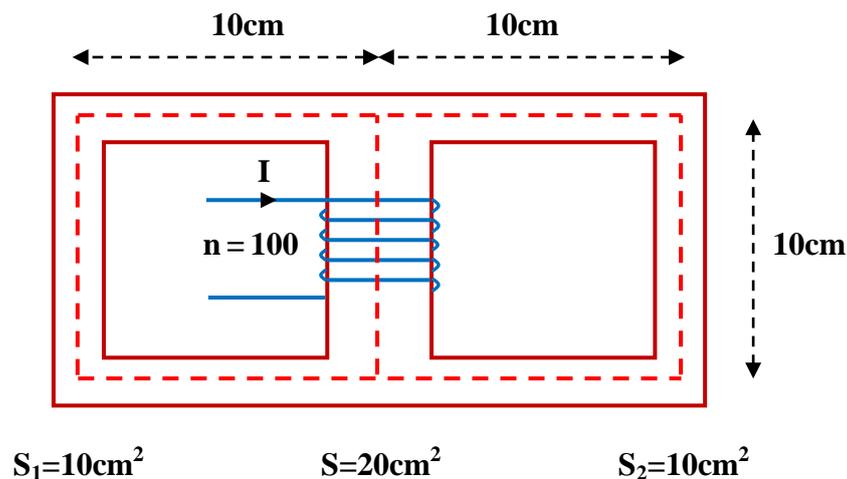
Exercice II

Reprendre le même exercice dans le cas où on pratique, selon une section droite du circuit magnétique, un entrefer d'épaisseur $e = 0,2\text{mm}$.

Exercice III

Le circuit magnétique ci-dessous est constitué d'un matériau dont la courbe d'aimantation passe par les points suivants :

B(T)	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2
H(At/m)	33	60	100	195	380	750



- 1°) En utilisant le théorème de la conservation du flux, justifier que l'induction magnétique est la même dans les 3 branches du circuit ($B_1 = B_2 = B$).
- 2°) En utilisant le théorème d'Ampère, calculer le courant I qui circule dans la bobine si l'on veut obtenir une induction magnétique de $0,6\text{T}$.
- 3°) Calculer la réluctance \mathcal{R} de la branche centrale et la réluctance \mathcal{R}_1 de la branche de gauche. En déduire la réluctance équivalente \mathcal{R}_{eq} .
- 4°) En utilisant la loi d'Hopkinson, calculer le flux ϕ traversant le circuit magnétique. Retrouver le résultat de la question 2°.