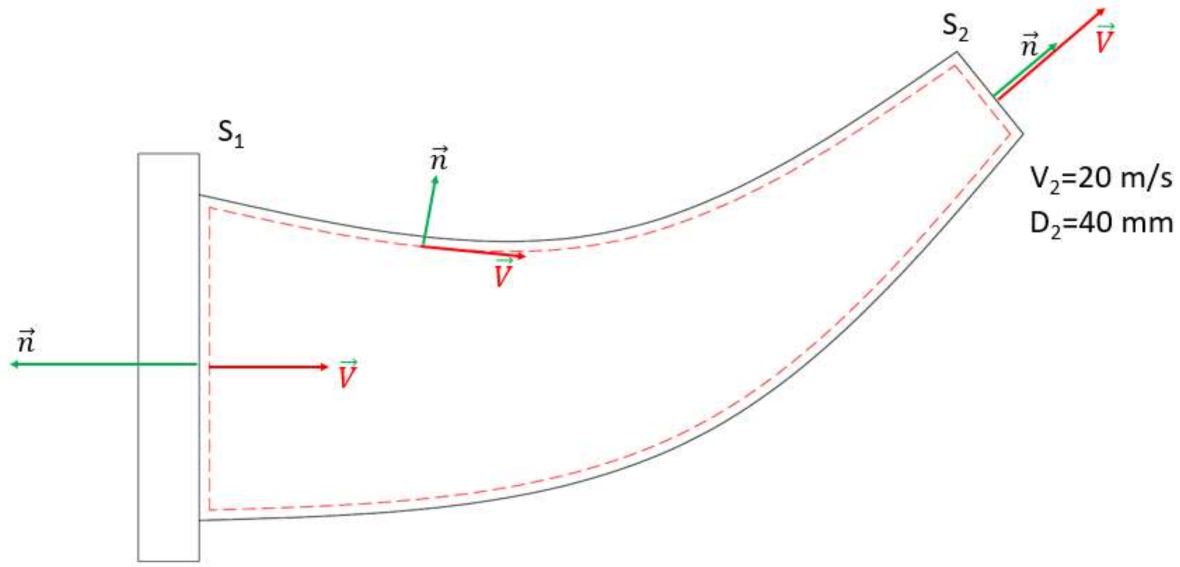
# TD1: Analyse par volume de contrôle : conservation de la masse

## Exercice 1 :




$$\frac{\partial}{\partial}\int_{CV}\rho dv = 0 \quad \textit{Régime permanent}$$

$$\int_{CS}\rho.\vec{V}.\vec{n}.dS = \int_{S1}\rho.\vec{V}.\vec{n}.dS + \int_{S2}\rho.\vec{V}.\vec{n}.dS + \int_{\Sigma}\rho.\vec{V}.\vec{n}.dS$$

$$avec \quad : \quad \int_{\Sigma}\rho.\vec{V}.\vec{n}.dS = 0$$

$$Donc: \quad -\int_{S1}\rho V dS + \int_{S2}\rho V dS = 0$$

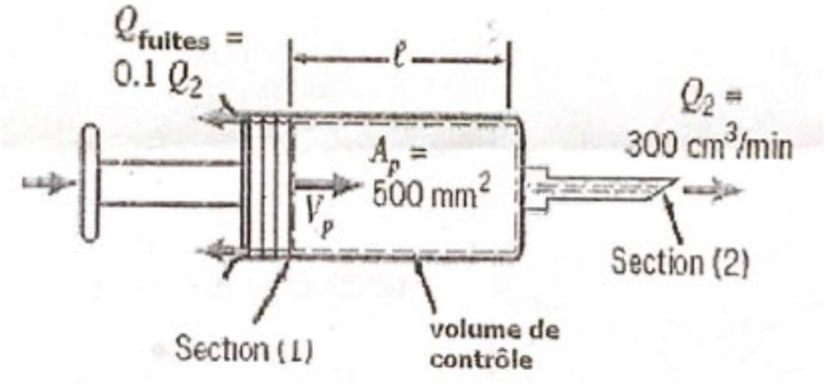
$$or: \quad \rho = cste$$

$$\Rightarrow \quad -V_1S_1 + V_2S_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad V_1S_1 = V_2S_2 = qv\left(m^3/s\right)$$

$$\Rightarrow \quad qv = V_2\frac{\pi}{4}D_2^2 = (20m/s)\frac{\pi}{4}\left(\frac{40mm}{1000mm/m}\right)^2 = 0{,}0251m^3/s$$

# Exercice 2 :




CV : déformable (régime non permanent)

$\rho = cste$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho dv + \int_{CS}\rho.\vec{V}.\vec{n}.dS = 0 \qquad (A)$$

$$\int_{CV}\rho dv = v_{CV} = A.l + v_{aig}$$

Ou l : est la longueur changeante du volume de contrôle, et $v_{aig}$ est le volume de l'aiguille.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho dv = A\frac{\partial l}{\partial t} = -Av_p \qquad \left(v_p = -\frac{\partial l}{\partial t}\right)$$

$$\int_{CS}\rho.\vec{V}.\vec{n}.dS = q_v + (q_v)_{fuite} = V.S + V_{fuite}.S_{fuite}$$

$$Equation\ (A)\ devient \Rightarrow -Av_p + q_v + (q_v)_{fuite} = 0$$

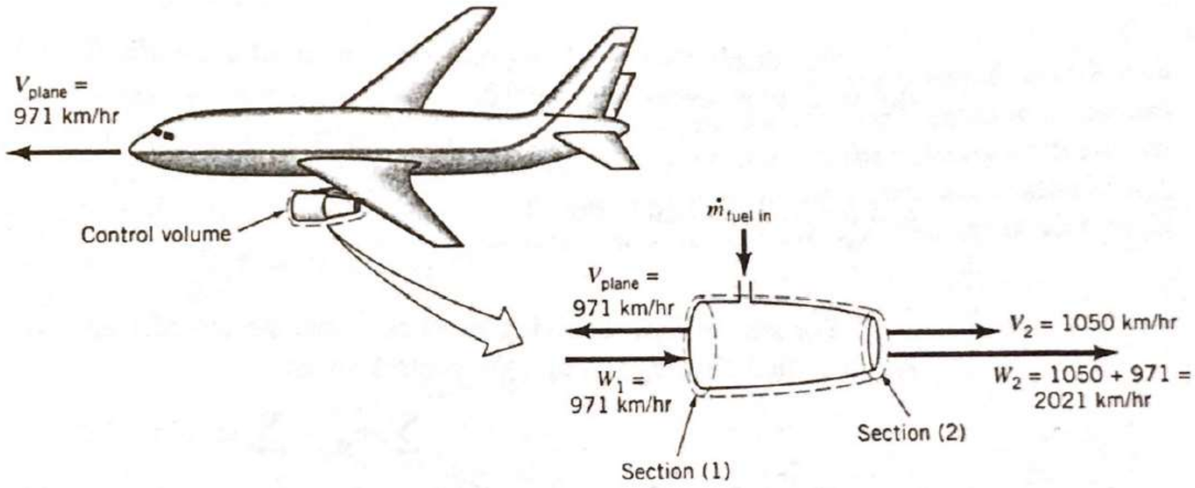
$$\Rightarrow v_p = \frac{q_v + (q_v)_{fuite}}{A}$$

$$puisque\ (q_v)_{fuite} = 0{,}1\times q_v$$

$$\Rightarrow v_p = \frac{q_v + 0{,}1\times q_v}{A} = \frac{(1{,}1)(300\,cm^3/\min)}{(500\,mm^2)}\frac{(1000\,mm^3)}{(cm^3)}$$

$$\Rightarrow v_p = 660\,mm/\min$$

# Exercice 3 :




Conservation de la masse en repère lié à l'avion (repère relatif) :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho dv+\int_{CS}\rho.\vec{V}.\vec{n}.dS=0 \qquad (A)$$

$$\vec{V}=\vec{U}+\vec{W}$$

Le régime est permanent,

$$Donc \quad \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho dv=0$$

L'équation (A) devient :

$$\int_{CS}\rho.\vec{V}.\vec{n}.dS=0$$

$$\Rightarrow \quad -\dot{m}_1-\dot{m}_{fuel}+\dot{m}_2=0$$

$$\Rightarrow \quad -\rho_1 A_1 W_1-\dot{m}_{fuel}+\rho_2 A_2 W_2=0 \quad (B)$$

La vitesse d'échappement : $W_2$
La vitesse d'admission : $W_1$
La vitesse des gaz d'échappement par rapport au volume de contrôle en mouvement :

$$\vec{V}_2=\vec{W}_2+\vec{V}_{avion}$$

$$\Rightarrow \vec{W}_2=\vec{V}_2-\vec{V}_{avion}$$

$$\Rightarrow W_2=1050+971=2021 \ km/h$$

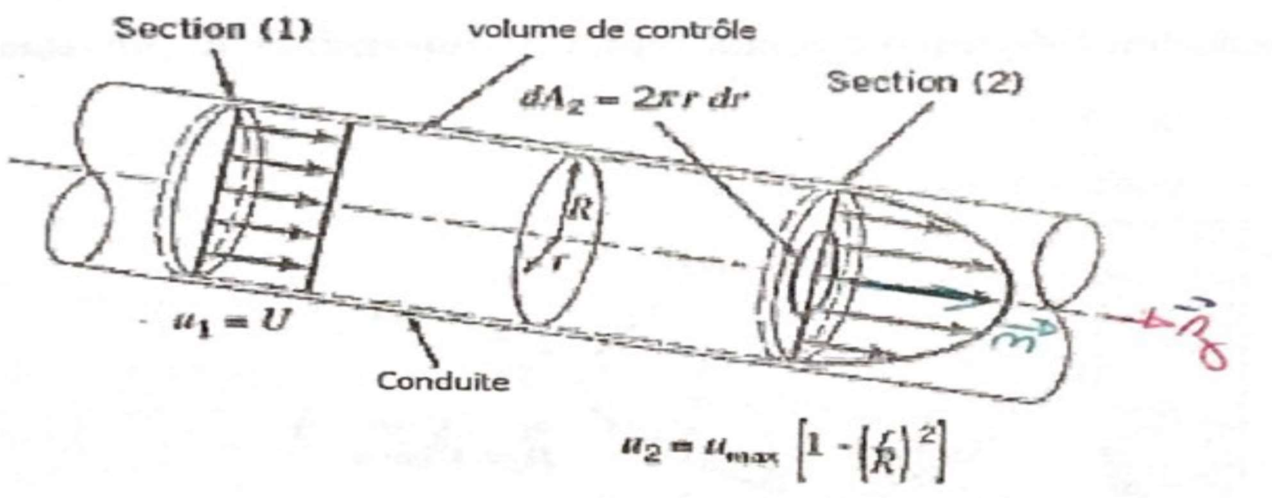
Section 1, on a :

$$\vec{V}_1 = \vec{W}_1 + \vec{V}_{avion}$$
$$\vec{V}_1 = 0 \Rightarrow air\ \ au\ \ repos\ \ par\ \ rapport\ \ au\ \ sol\ \ terreste$$
$$\Rightarrow \vec{W}_1 = -\vec{V}_{avion}$$
$$\Rightarrow W_2 = -(-971) = 971\,km/h$$

L'équation (B) devient :

$$\dot{m}_{fuel} = \rho_2 A_2 W_2 - \rho_1 A_1 W_1$$
$$\Rightarrow \dot{m}_{fuel} = (0{,}515\,kg/m^3)(0{,}558\,m^2)(2021\,km/h)(1000\,m/km) - (0{,}736\,kg/m^3)(0{,}8\,m^2)(971\,km/h)(1000\,m/km)$$
$$\Rightarrow \dot{m}_{fuel} = 9100\,kg/h$$

# Exercice 4 :




L'application de la conservation de la masse :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \rho dv + \int_{CS} \rho \vec{V}.\vec{n}.dS = 0$$

Le régime est permanent,

$$Donc\ \ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \rho dv = 0$$

$$et\ \ \ \rho = cste$$

L'intégrale de surface est évaluée aux sections 1 et 2, donne :

$$-A_1.u_1 + \int_{S2} V.\vec{n}.dS_2 = 0 \qquad (A)$$

$$avec\ \ : u_1 = U$$

puisque la composante de la vitesse V, perpendiculaire a la section 2 est u2, et la section transversale de l'élément est « dS2 », est égal à $2\pi r dr$, l'équation (A) devient :

$$-S_1.U+\int_0^R u_2 2\pi r dr=0 \qquad (B)$$

On a comme donnée :

$$u_2=u_{\max}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

L'équation (B) devient :

$$-S_1.U+2\pi u_{\max}\int_0^R\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]rdr=0$$

En intégrant, on trouve :

$$-\pi\ R^2.U+2\pi u_{\max}\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4R^2}\right)_0^R=0$$

$$\Rightarrow U=\frac{u_{\max}}{2}$$

# Exercice 5 :

L'application de la conservation de la masse :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho dv+\int_{CS}\rho.\vec{V}.\vec{n}.dS=0$$

Le régime est permanent,

$$Donc\quad\Rightarrow\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho dv=0$$

$$et\quad \rho=cste$$

Donc :

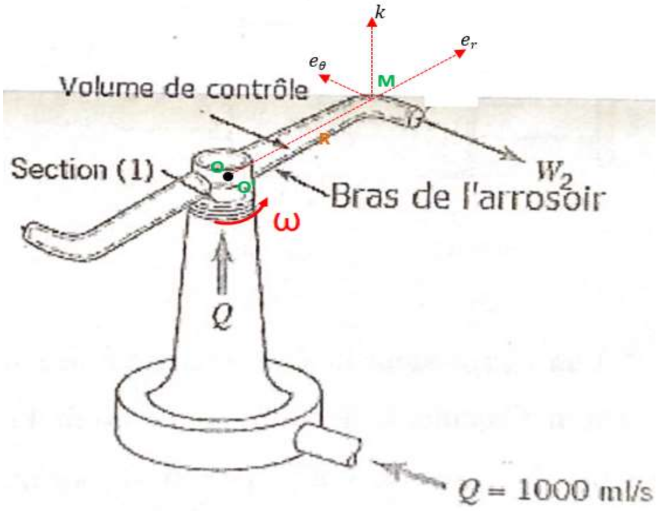
$$\int_{CS}\rho.\vec{V}.\vec{n}.dS=-\dot{m}_{in}+\dot{m}_{out}=0\quad(1)$$

$$\dot{m}_{in}=qv$$

$$\dot{m}_{out}=2W_2A_2$$

$$(1)\Rightarrow W_2=\frac{qv}{2A_2}$$

$W_2$ : vitesse relative (vitesse du fluide par rapport aux bras)




Déterminons la vitesse du bras :

$$On\ a\ :\quad \vec{V}_2 = \vec{W}_2 + \vec{U}_2 \quad (2)$$

$$\vec{U}_2 = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} = \omega\vec{k} \wedge r\vec{e}_r$$

$$\Rightarrow \vec{U}_2 = \omega r\vec{e}_\theta$$

On remplace dans l'équation (2) :

$$\Rightarrow \quad \vec{V}_2 = \vec{W}_2 + \omega R\vec{e}_\theta \quad = \left(\omega R - \frac{qv}{2A_2}\right)\vec{e}_\theta$$