C.G. (S2)
2017-2018

Correction du C.C. 2 (Mathématique)

Exercice 1 :

1 - Régle de Sarrus :

$$\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} = -3 \\ = -4 \\ = - \\ = 18 \\ = 2 \\ = 1 \end{array}$$

Donc : $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 4 - 1 + 18 + 2 + 1 = 11$

2) - Méthode générale.

On a : $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = +2 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

$= 2(9-2) - (3-1) + (2-3) = 14 - 2 - 1 = 11$

Exercice 2 :

$$\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ x + y + z = 4 \\ x - y + z = 1 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\times\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 0 + 2(-1-1) = 2 - 4 = -2$

Donc le système possède une solution unique :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{+\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{(1-2)+(5-8)+(5-4)}{-2} = \frac{-1-3+1}{-2} = \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{+\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{(4-1)-(5-2)+(5-8)}{-2} = \frac{\cancel{3}-\cancel{3}-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{+\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{(1+4)-(1+5)+(4-5)}{-2} = \frac{5-6-1}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

D'où, la solution de l'exercice (2) est $(x, y, z) = \left(\frac{3}{2} ; \frac{3}{2} ; 1\right)$.

Exercice 3

1) $\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ x + 3y + z = 8 \\ \quad -y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \iff A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} ; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) Le calcul du déterminant : $\det(A)$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = (6+1) - (2+2) = 7 - 4 = 3.$$

3) L'inverse de A.

Puisque $\det(A) = 3 \neq 0$, alors A est inversible et on a : $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \left[Com(A) \right]^t$.

On calcule $Com(A)$:

$$Com(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +(6+1) & -(2-0) & +(-1-0) \\ -(2+2) & +(2-0) & -(-1-0) \\ +(1-6) & -(1-2) & +(3-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & -2 & -1 \\ -4 & 2 & +1 \\ -5 & +1 & 2 \end{pmatrix}$$

Donc : $\left[Com(A) \right]^t = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -5 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Par la suite : $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & -4 & -5 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

4) Résoudre le système :

$$\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ x + 3y + z = 8 \\ \quad -y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \iff AX = b \iff X = A^{-1}.b.$$

$$\iff X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & -4 & -5 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \iff X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7\times5 - 4\times8 - 5\times0 \\ -2\times5 + 2\times8 + 1\times0 \\ -1\times5 + 1\times8 + 2\times0 \end{pmatrix}$$

$$\iff X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/3 \\ 6/3 \\ 3/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \iff x = 1 \ ; \ y = 2 \ ; \ z = 1.$$

Fin